TD1 de mécanique - PHY121 - CORRIGE
Statique et Dynamique du point matériel "sans cinématique"

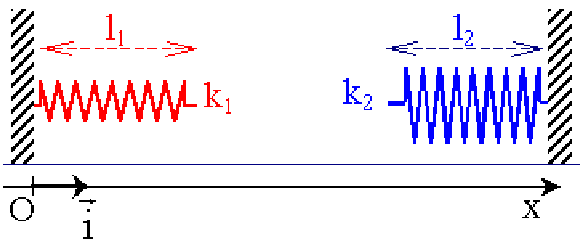
Thèmes abordés : lois de Newton, forces, statique, conservation de la quantité de mouvement.
Concepts clés : force, système, point matériel, mouvement inertiel, référentiel d'inertie, quantité de mouvement.
Objectifs du TD : comprendre et utiliser les lois de Newton, savoir choisir le(s) système(s) adéquat(s), savoir faire un bilan de forces, manipulation de forces diverses, comment les forces "se transmettent" d'un corps à un autre, que faire d'une corde ou d'une poulie dans l'approximation de frottements et de masse négligeables, savoir poser un problème simple de conservation de la quantité de mouvement.
Mathématiques utilisées : vecteurs, projection d'un vecteur ou d'une équation vectorielle, résolution d'une équation vectorielle, trigonométrie.
Classification des exercices :
* = exercice de base, ** = niveau exigé en examen, *** = un peu plus difficile

1*-*Exercice de tronc commun*
Deux ressorts, de longueurs l_1 et l_2 au repos et de raideurs k_1 et k_2, sont accrochés bout à bout et tendus horizontalement entre deux murs distants de $D > l_1+l_2$. Le dispositif est immobile.
a- Calculer l'allongement de chacun des ressorts.
b- Calculer pour chaque ressort, la force exercée par le ressort sur le mur auquel il est fixé. Comparer.

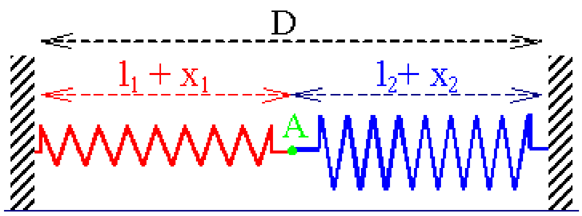
Difficulté : elle réside principalement dans le choix d'un système.
(Les énoncés du Principe d'Inertie (PI) ou du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD), indiquent que ces principes ne sont applicables que sur ***un système bien déterminé****. C'est différent pour le Principe d'Action-Réaction.)*

Informations pertinentes :
- tout le dispositif est à l'équilibre. C'est donc vrai pour tout système choisi.
- pour un système à l'équilibre, on peut utiliser soit le PI, soit le PFD.
- soit x_1 et x_2 les allongements respectifs des ressorts 1 et 2 (voir le dessin). Les longueurs de chacun des ressort sont donc l_1+x_1 et l_2+x_2. Donc $D = l_1+l_2+x_1+x_2$.
- $D > l_1+l_2$ signifie que les ressorts sont étirés. D'après le dessin, x_1 et x_2 sont donc nécessairement positifs.
- la force de rappel exercée par le ressort 1 (sur…) a pour norme $k_1 x_1$, et $k_2 x_2$ pour celle exercée par le ressort 2 (sur …).
- remarque : la condition d'horizontalité, en l'absence de tout support, impose que l'on a fait l'hypothèse que les ressorts sont de masse négligeables, bien que cela ne soit pas explicite dans le texte.

Ressorts non étirés

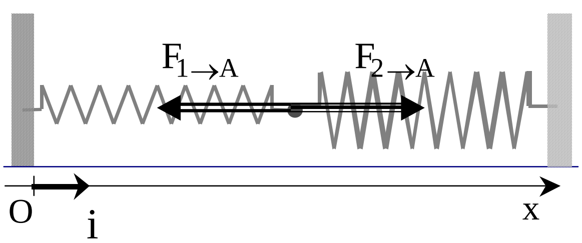


Dispositif à l'équilibre



a)
Référentiel : terrestre supposé galiléen (voir exercice 2).
Repère. Une dimension suffit : axe Ox et repère $R(O, \vec{i})$
Système. Le plus commode est un système qui subisse les deux forces de rappel. C'est le cas du point d'attache A entre les deux ressorts. (On peut procéder autrement, mais c'est plus long et compliqué).

Forces extérieures à A : On considère que le point A est de masse négligeable (horizontalité des ressorts). Le point A est en contact avec les 2 ressorts et avec l'air. En l'absence de mouvement, il n'y a pas de frottements avec l'air, et par conséquent, les deux seules forces extérieures exercées sur A, sont les forces de rappel, égales en direction et norme, opposées en sens.



Ecriture des forces : $\vec{F}_{1\to A} = -k_1\, x_1\, \vec{i}$; $\vec{F}_{2\to A} = +k_2\, x_2\, \vec{i}$

<u>Ecriture de l'équilibre de A</u> : D'après le PI, A est immobile donc la résultante des forces extérieures s'exerçant sur A est nulle. C'est à dire : $\vec{0} = \vec{F}_{1\to A} + \vec{F}_{2\to A} = -k_1\, x_1\, \vec{i} + k_2\, x_2\, \vec{i} = (-k_1\, x_1 + k_2\, x_2)\, \vec{i}$

D'où, en projetant sur Ox : $0 = -k_1\, x_1 + k_2\, x_2$ *ce qui s'écrit :* $x_1 = \dfrac{k_2}{k_1}\, x_2$

En utilisant $D = l_1+l_2+x_1+x_2$ *, on obtient les résultats cherchés :*

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1+k_2}\left(D-(l_1+l_2)\right) \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{k_1}{k_1+k_2}\left(D-(l_1+l_2)\right)$$

<u>Remarques et vérification des résultats</u>

- A cause de l'équilibre, $\vec{0} = \vec{F}_{1\to A} + \vec{F}_{2\to A}$ *, les forces de rappel des ressorts exercées sur A sont égales en norme.*

- Attention aux erreurs de signe : une gestion correcte des signes (x_1*,* x_2*,* $\vec{F}_{2\to A}$ *,…) demande beaucoup de rigueur.*

- Remarquer la symétrie dans l'écriture des résultats (les deux ressorts sont interchangeables) :

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1+k_2}\left(D-(l_1+l_2)\right)$$

$$x_2 = \frac{k_1}{k_1+k_2}\left(D-(l_1+l_2)\right)$$

C'est aussi un moyen de contrôler les résultats.

- Vérifiez que les résultats sont corrects du point de vue dimensionnel. A titre d'exercice, établir l'équation aux dimensions d'une constante de rappel de ressort.

b) *La force exercée par le ressort 1 sur le mur de gauche auquel il est attaché, est la force de ra ppel de ce ressort :*

$$\vec{F}_{\text{ressort }1\to\text{mur gauche}} = -k_1\, x_1\, \vec{i} = -k_1 \frac{k_2}{k_1+k_2}\left(D-(l_1+l_2)\right)\vec{i}$$

(Attention au sens de la force)

De même, la force exercée par le ressort 2 sur le mur de droite est :

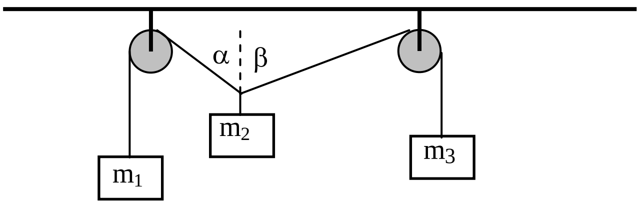
$$\vec{F}_{\text{ressort }2\to\text{mur droit}} = +k_2\, x_2\, \vec{i} = k_2 \frac{k_1}{k_1+k_2}\left(D-(l_1+l_2)\right)\vec{i} = -\vec{F}_{\text{ressort }1\to\text{mur gauche}}$$

Ces deux forces sont égales en norme et en direction, opposées en sens.

2-***Exercice de tronc commun*

Le système mécanique représenté sur la figure est en équilibre. Les masses des poulies et des cordes sont considérées négligeables, ainsi que les frottements. Calculer les angles α et β, entre la verticale et les cordes qui soutiennent le corps du milieu.

<u>Conseil</u> : commencer par préciser le ou les systèmes pris en compte, et par dessiner les forces extérieures qui s'exercent sur chaque système.

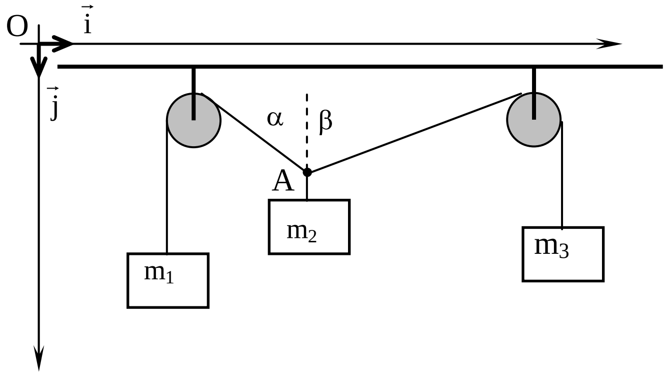


<u>Remarque</u> : dans le corrigé les poulies sont dessinées à la même hauteur. Nous verrons que leurs positions respectives n'entrent pas en ligne de compte lors de la résolution du problème. Nous pourrons donc en conclure, que la solution les angles a et b ne dépendent pas de la position des poulies.

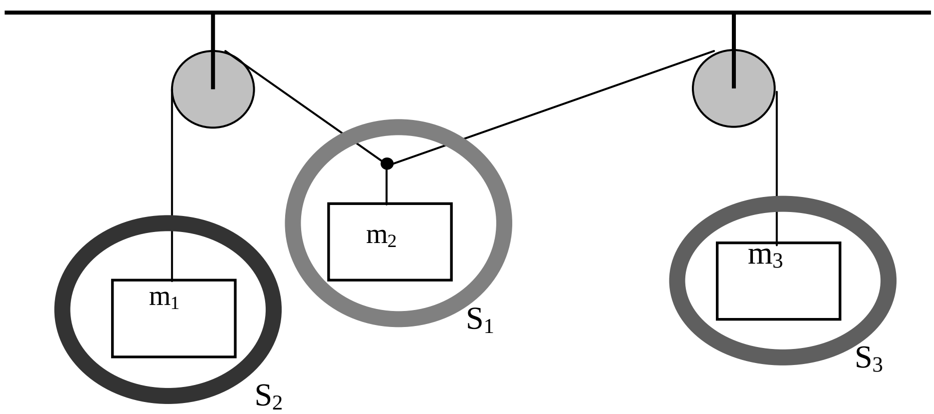
<u>Référentiel</u> : terrestre supposé galiléen (condition nécessaire pour utiliser le PFD et justifiée par le fait que le dispositif est petit et par la courte durée de l'observation - voir cours).

<u>Repère</u> : $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ *. Problème à 2 dimensions : 2 axes suffisent.*

<u>Difficulté</u> : choix de système. Il faut faire apparaître les angles α *et* β*. Or les forces de tension de corde exercées au point A sont portées par les cordes ayant les directions voulues.* $S_1 = \{m_2, A\}$ *est un système sur lequel elles s'appliquent.*

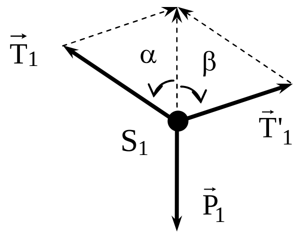


<u>Systèmes utilisés</u> :



<u>Système</u> : S_1 = {masse m_2 , point A}

- Forces exercées sur S_1 :



$$\vec{P}_1 = m_2\ g_0\ \vec{j}$$

$$\vec{T}_1 = \left\|\vec{T}_1\right\|\left(-\sin\alpha\ \vec{i} - \cos\alpha\ \vec{j}\right)$$

$$\vec{T}'_1 = \left\|\vec{T}'_1\right\|\left(\sin\beta\ \vec{i} - \cos\beta\ \vec{j}\right)$$

- PFD : $\vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T}'_1 = \vec{0}$

$$m_2\ g_0\ \vec{j} + \left\|\vec{T}_1\right\|\left(-\sin\alpha\ \vec{i} - \cos\alpha\ \vec{j}\right) + \left\|\vec{T}'_1\right\|\left(\sin\beta\ \vec{i} - \cos\beta\ \vec{j}\right) = \vec{0}$$

- Projections du PFD :

axe ox : $-\sin\alpha\left\|\vec{T}_1\right\| + \sin\beta\left\|\vec{T}'_1\right\| = 0$ *. Ce qui donne :* $\sin\alpha\left\|\vec{T}_1\right\| = \sin\beta\left\|\vec{T}'_1\right\|$ *(équation 1)*

axe oy : $m_2\ g_0 - \cos\alpha\left\|\vec{T}_1\right\| - \cos\beta\left\|\vec{T}'_1\right\| = 0$ *(équation 2)*

- Problème : Les normes des tensions T_1 et T'_1 ne sont pas connues.

- Remarque : la norme de toute force de tension est la même en tout point d'une corde donnée aux conditions suivantes :

- la corde considérée est de masse négligeable
- le mouvement de la poulie qui agit sur cette corde n'est pas gêné : pas de frottements à l'axe.
- si il y a mouvement, la poulie doit avoir une masse négligeable

En supposant que ces conditions sont réalisées pour les deux cordes du dispositif, on peut dire que :

- *la tension T_2 exercée par la corde de gauche sur le système S_2 est de même norme que T_1*
- *la tension T_3 exercée par l'autre corde sur S_3 est de même norme que T_1.*

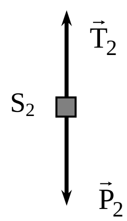
Par conséquent l'étude du système S_2 doit nous permettre d'évaluer la norme de la tension T_1, et celle du système S_3 permet de calculer la norme de T'_1.

ATTENTION : on ne peut pas écrire l'égalité des vecteurs car ces forces ont des directions différentes .

$\left\|\vec{T}_1\right\| = \left\|\vec{T}_2\right\|$ *mais* $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$.

<u>*Système S_2*</u> *: masse m_1*

- Forces exercées sur S_2 :



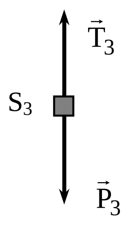
$$\vec{P}_2 = m_1\ g_0\ \vec{j}$$

$$\vec{T}_2 = -\left\|\vec{T}_2\right\|\vec{j}$$

- PFD : $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0}$

- Projection du PFD sur l'axe oy : $m_1\ g_0 - \left\|\vec{T}_2\right\| = 0$

Ce qui donne $\left\|\vec{T}_1\right\| = \left\|\vec{T}_2\right\| = m_1\ g_0$



<u>*Système S_3*</u> *; masse m_3*

- Forces exercées sur S_3 : $\vec{P}_3 = m_3\ g_0\ \vec{j}$ *et* $\vec{T}_3 = -\left\|\vec{T}_3\right\|\vec{j}$

… Idem que pour S_2 … on trouve : $\left\|\vec{T}'_1\right\| = \left\|\vec{T}_3\right\| = m_3\ g_0$

<u>*Système S_1*</u> *:*

On remplace T_1 et T'_1 par les valeurs trouvées puis on résout le système d'équations.

$$\begin{cases} m_1\, g_0\, \sin\alpha = m_3\, g_0\, \sin\beta & \textit{(équation 1)} \\ m_2\, g_0 - m_1\, g_0\, \cos\alpha - m_3\, g_0\, \cos\beta = 0 & \textit{(équation 2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_3 \sin\beta = m_1\, \sin\alpha \\ m_3 \cos\beta = m_2 - m_1 \cos\alpha \end{cases}$$

On porte les deux équations au carré pour combiner les cosinus et les sinus facilement.

$$\begin{cases} {m_3}^2\, \sin^2\beta = {m_1}^2\, \sin^2\alpha \\ {m_3}^2\, \cos^2\beta = {m_2}^2 + {m_1}^2\, \cos^2\alpha - m_2\, m_1 \cos\alpha \end{cases}$$

En additionnant les deux équations (et en utilisant $\sin^2 + \cos^2 = 1$ *), on obtient :*

$${m_3}^2 = {m_2}^2 + {m_1}^2 - 2\, m_2\, m_1 \cos\alpha$$

On en déduit donc : $\cos\alpha = \dfrac{{m_2}^2 + {m_1}^2 - {m_3}^2}{2\, m_2\, m_1}$

Le calcul étant totalement symétrique pour β, on trouve : $\cos\beta = \dfrac{{m_2}^2 + {m_3}^2 - {m_1}^2}{2\, m_2\, m_3}$

***Remarque** : α et β ne peuvent varier qu'entre 0° et 90°. (donc attention si vous trouvez un signe négatif)*

***Application** : cas où $m_1 = m_2 = 2\, m_3$*

On trouve $\cos\alpha = \dfrac{7}{8}$ *et* $\sin\beta = 2\,\sin\alpha = 2\sqrt{1 - \dfrac{7^2}{8^2}} = \sqrt{\dfrac{15}{16}}$

Ce qui donne : α = 29° et β =76°

3*-

Le principe d'inertie permet-il d'affirmer que :

a) un corps ne peut se déplacer sans qu'une force n'agisse sur lui
b) toute variation de vitesse d'un corps exige l'action d'une force
c) si l'énergie cinétique d'un corps est constante, aucune force ne s'exerce sur lui
d) si la force exercée sur un corps devient et reste nulle, le corps s'arrête

Justifiez vos réponses.

<u>Principe d'inertie</u> : Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie d'un système matériel isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme (MRU). Réciproquement, si le centre d'inertie d'un système a un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen, alors le système est isolé.

<u>Précisions</u> :

- un système isolé est tel qu'aucune force extérieure ne s'exerce sur le système (ou bien la résultante des forces extérieures est nulle).

- un système en mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par un vecteur vitesse constant (sa norme et sa direction ne changent pas au cours du temps).

Ceci nous permet d'affirmer que :

a) Faux : le centre d'inertie d'un corps peut se déplacer sans qu'une force n'agisse sur lui :

- dans un référentiel galiléen, son mouvement est alors rectiligne uniforme.

- dans référentiel non-galiléen, le P.I. ne dit pas directement ce qu'il se passe. Par contre, on en déduit qu'un bon moyen pour identifier un référentiel non-galiléen, est d'observer un mouvement non rectiligne uniforme alors qu'aucune force ne s'exerce sur le système : auquel cas, le C.I. se déplace sans l'action de forces.

b) - Vrai dans un référentiel galiléen : le P.I. dit que si la vitesse du centre d'inertie est constante en norme et en direction (MRU) dans un référentiel galiléen, alors la résultante des forces est nulle. Et réciproquement. Donc pour obtenir un mouvement non-rectiligne (variation de la direction de la vitesse) ou non-uniforme (modification de la norme de la vitesse), il faut nécessairement l'action d'un force.

- Faux dans un référentiel non-galiléen. Un exemple suffit : soit un corps immobile dans un référentiel R galiléen; d'après le P.I., la résultante des forces extérieures appliquées à l'objet est nulle. Soit un référentiel R' non-galiléen en mouvement rectiligne accéléré par rapport au référentiel R. Le mouvement du corps observé dans R' est rectiligne accéléré (en sens inverse), donc le module de la vitesse dans R' est modifié bien que la résultante des forces soit nulle. (on peut faire le même raisonnement avec tout mouvement non-rectiligne uniforme).

*c) Faux. L'énergie cinétique d'un objet dépend du module de sa vitesse : $E_c = 1/2\, m\, v^2$. Donc si l'énergie cinétique d'un corps (de masse constante) est constante, alors le module de sa vitesse est constant, donc uniforme. Ceci ne garanti en rien que le mouvement soit rectiligne. Or, dans un référentiel galiléen, le P.I. dit que c'est le mouvement rectiligne **et** uniforme qui exige l'absence de forces extérieures. (Dans un référentiel non-galiléen quelconque, nous ne sommes pas en mesure d'affirmer quoi que ce soit. Donc l'affirmation ne tient pas non plus).*

d) Faux dans un référentiel galiléen (et a fortiori dans un référentiel non-galiléen) : tant que la force s'exerce sur le corps, le vecteur vitesse du corps est modifié, l'objet est en mouvement. Lorsque la force disparaît, le P.I. dit que le mouvement du corps est alors soit rectiligne uniforme, soit immobile. Pour que le corps reste immobile, il faut qu'à l'instant où la force cesse, sa vitesse soit nulle, sinon le mouvement est rectiligne uniforme et la vitesse est celle qu'avait l'objet à l'instant où la force a cessé. L'affirmation est donc fausse de manière générale car elle ne fait pas état de la condition nécessaire de vitesse nulle à l'instant où cesse la force.

Question subsidiaire : dans un référentiel donné, un corps en mouvement peut-il voir le module de sa vitesse passer par zéro ? (songer au cas d'un corps oscillant au bout d'un ressort)

4* Le père Mathieu attelle son baudet Aliboron à la charrette et crie: "Hue!". Mais l'animal qui vient de lire les **lois de Newton** réplique : "Ce n'est pas la peine que j'essaie d'avancer! D'après la troisième loi de Newton, la charrette tirera autant sur moi que je tirerai sur elle! Il ne peut donc y avoir de force appliquée sur la charrette et moi-même; or notre vitesse actuelle étant nulle, la deuxième loi de Newton nous enseigne qu'elle le restera forcément!"

Pouvez-vous aider le père Mathieu à convaincre son âne d'avancer?

*Tout est une question de choix du système et du référentiel d'une part, du bilan des forces **extérieures** et de la compréhension de la 3ème loi de Newton (Action/réaction) d'autre part :*

I- Système {âne + charrette} dans le référentiel du sol (terrestre galiléen)
Forces extérieures au système :

- Forces à distance : le poids du système $\vec{P}_{A+C}$

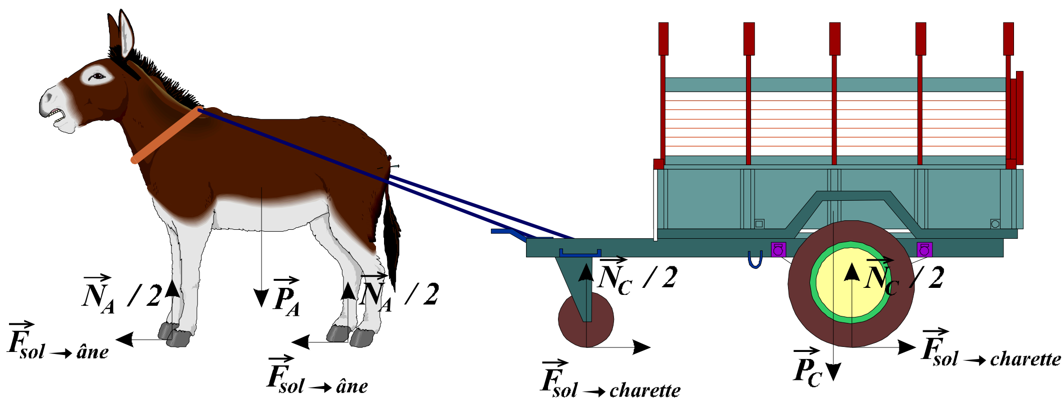
- Forces de contact :

réaction normale du sol sur l'âne et la charrette $\vec{N}_{A+C}$

forces de frottement statique du sol sur l'âne $\vec{F}_{\text{sol}\to\text{âne}}$

sur la charrette $\vec{F}_{\text{sol}\to\text{charrette}}$

(on néglige les frottements avec l'air)



Donc :

1- ce sont les forces de frottement statique exercées par le sol sur l'âne (l'âne pousse sur le sol qui le repousse en réaction) qui permettent au système d'avancer.

2- la force exercée par l'âne sur la charrette est intérieure au système : elle n'agit pas pour modifier son mouvement. Idem pour la force exercée par la charrette sur l'âne.

Remarque : Les frottements sur les roues non-motrices de la charrette servent à mettre les roues en rotation autour de leur axe. Une fois que les roues sont "lancées", et qu'une vitesse de croisière (mouvement uniforme) est atteinte, cette force est quasiment nulle.

II- Système {charrette} dans le référentiel du sol (terrestre galiléen)
Forces extérieures au système :

Forces à distance : le poids de la charrette $\vec{P}_C$

Forces de contact :

réaction normale du sol sur la charrette $\vec{N}_C$

(forces de frottement statique du sol sur la charrette lors du démarrage) $\vec{F}_{\text{sol}\to\text{charrette}}$

force exercée par l'âne sur la charrette $\vec{F}_{\text{âne}\to\text{charrette}}$

(on néglige les frottements avec l'air)

C'est la force exercée par l'âne sur la charrette qui la met en mouvement par rapport au sol.
Dans le référentiel de la charrette (qui ne sera galiléen que si le mouvement de la charrette est rectiligne uniforme par rapport au sol), la charrette est immobile par rapport à l'âne. Mais le sol "défile vers l'arrière".

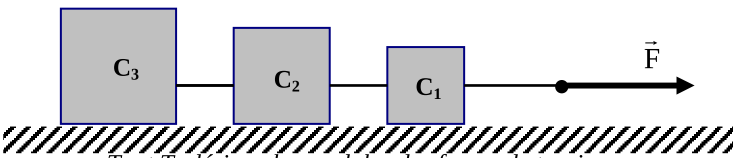
Corrigeons le raisonnement de l'âne :
"La résultante des forces extérieures appliquée sur la charrette et moi-même est la force de frottement du sol sur mes pattes: c'est elle qui nous permet d'avancer par rapport au sol, c'est à dire dans le référentiel terrestre." *(raisonnement sur le système {charrette + âne}. On néglige les frottements sol/roues).*
"La résultante des forces extérieures appliquée sur la charrette est égale à la force que j'exerce dessus. D'après la troisième loi de Newton, la charrette tirera autant sur moi que je tirerai sur elle. Le système {charrette} ne bougera pas par rapport à moi, c'est à dire dans mon référentiel propre, parce que la liaison est rigide, mais comme je bouge par rapport au sol que je repousse sous mes pattes, la charrette bougera de la même manière que moi dans le référentiel du sol".*(raisonnement sur le système {charrette}).*

5* -*Exercice de tronc commun*

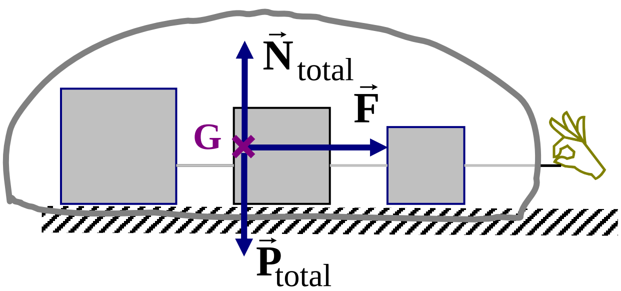
Sur une surface horizontale, on considère un jouet composé de 3 cubes différents C_1, C_2 et C_3, de masses m_1, m_2, m_3. Les 3 cubes sont reliés par des fils de tensions T_1 entre C_1 et C_2, et T_2 entre C_2 et C_3. On tire le jouet horizontalement avec une force $\vec{F}$ constante, par une corde attachée à C_1. On néglige les frottements.

1- Calculer l'accélération prise par le train ainsi que les tensions T_1 et T_2.

2- A.N. $m_1 = 100$g $m_2 = 200$g $m_3 = 300$g $F = 0,6$ N



Remarque : T_1 et T_2 désigne les modules des forces de tension.



<u>Système</u> : { C_1, C_2, C_3 } de masse $M_{totale} = m_1 + m_2 + m_3$, de centre de masse G
<u>Mouvement</u> : le mouvement d'ensemble des 3 cubes (mouvement de G) est rectiligne horizontal vers la droite. Il n'y a pas de mouvement vertical. Les vecteurs vitesse et accélération de G sont donc tous deux horizontaux.
<u>Forces extérieures</u> :

- *A distance : poids de l'ensemble $\vec{P}_{total}$, verticale vers le bas.*
- *De contact : avec le sol : réaction normale du sol $\vec{N}_{total}$ verticale vers le haut,*
  pas de frottements
  (avec l'air : pas de frottements)
  en bout de corde extérieur : force appliquée $\vec{F}$, horizontale vers la droite.

<u>Accélération</u> : l'accélération $\vec{\gamma}$ de ce système non-déformable est la même pour ce système que pour chacune des masses.

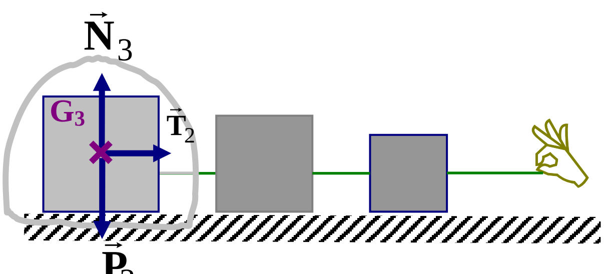
<u>PFD</u> : $\vec{P}_{total} + \vec{N}_{total} + \vec{F} = M_{totale}\,\vec{\gamma}$

Composante vectorielle de la RFD dans la direction horizontale : $\vec{F} = M_{totale}\,\vec{\gamma}$

(composante dans la direction verticale : $\vec{P}_{total} + \vec{N}_{total} = \vec{0}$ *)*

D'où $\vec{\gamma} = \dfrac{\vec{F}}{m_1 + m_2 + m_3}$ *A.N.* $\|\vec{\gamma}\| = \dfrac{0,6}{0,1 + 0,2 + 0,3} = 1\,\text{ms}^{-2}$

<u>Calcul des tensions</u> T_1 et T_2 : il faut utiliser des systèmes pour lesquels elles apparaissent dans la liste des forces extérieures. Il y a plusieurs manières d'y arriver.



<u>Système</u> : { C_3 } de masse m_3 , de centre de masse G_3
<u>Mouvement</u> : Les trois cubes sont reliés par des cordes tendues, indéformables, de masses négligeables. Ils ont donc tous les trois le même mouvement, donc la même accélération, celle précédemment calculée pour G. Pour G_3 : pas de mouvement vertical, vecteur accélération horizontal. $\vec{\gamma}_3 = \vec{\gamma}$ *calculée précédemment.*

<u>Forces extérieures</u> :

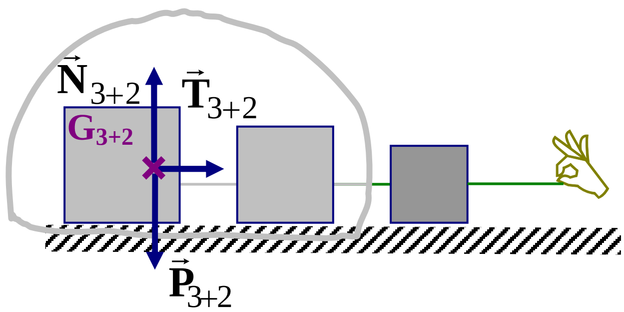
forces à distance : poids $\vec{P}_3$

forces de contact : avec le sol : réaction normale du sol $\vec{N}_3$ *(pas de frottements)*
(avec l'air : pas de frottements)
avec la corde : tension de la corde $\vec{T}_2$

<u>PFD</u> : $\vec{P}_3 + \vec{N}_3 + \vec{T}_2 = m_3\,\vec{\gamma}_3 = m_3\,\vec{\gamma}$

Composante vectorielle de la RFD dans la direction horizontale : $\vec{T}_2 = m_3\,\vec{\gamma} = \dfrac{m_3\,\vec{F}}{m_1 + m_2 + m_3}$

<u>A.N.</u> $\|\vec{T}_2\| = 0{,}3\,.\,1 = 0{,}3\,\text{N}$



<u>Système</u> : { C_3 , C_2} de masse m_3 + m_2 , de centre de masse G_{3+2}
<u>Mouvement</u> : même chose que précédemment $\vec{\gamma}_{3+2} = \vec{\gamma}$

<u>Forces extérieures</u> : poids $\vec{P}_{3+2}$

réaction normale du sol $\vec{N}_{3+2}$

tension de la corde $\vec{T}_1$

<u>PFD</u> : $\vec{P}_{3+2} + \vec{N}_{3+2} + \vec{T}_1 = (m_3 + m_2)\,\vec{\gamma}_{3+2} = (m_3 + m_2)\,\vec{\gamma}$

Composante vectorielle du PFD dans la direction horizontale : $\vec{T}_1 = (m3 + m2)\,\vec{\gamma} = \dfrac{(m_3 + m_2)\,\vec{F}}{m_1 + m_2 + m_3}$

<u>A.N.</u> $\|\vec{T}_1\| = (0{,}3 + 0{,}2)\,.\,1 = 0{,}5\,\text{N}$

<u>Remarque</u> : $F > T_1 > T_2$

6* Deux cubes A et B différents, sont posés sur une surface horizontale sans frottements. Les deux cubes sont en contact. On pousse horizontalement le cube A avec une force constante $\vec{F}$, entraînant un mouvement d'ensemble des deux cubes.

a) La force exercée par le cube A sur le cube B est elle égale à $\vec{F}$?

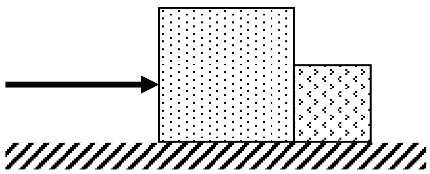
b) La force exercée par B sur A est-elle égale à la force exercée par A sur B?

c) Calculer l'accélération du système ainsi que les forces $\vec{F}_{A\to B}$ et $\vec{F}_{B\to A}$

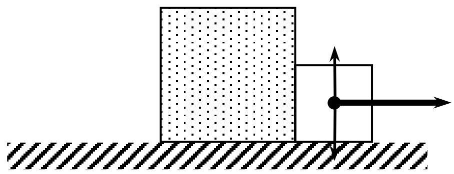
A.N. : $m_A = 10kg$ $m_B = 30kg$ $F = 40N$

d) Ayant rencontré un mur, les cubes s'immobilisent, mais on continue cependant à les pousser avec la même force $\vec{F}$. Mêmes questions qu'en a) et b)

e) On supprime le mur, et les deux cubes recommencent à glisser sous l'action de $\vec{F}$, mais cette fois sur une surface rugueuse où le frottement est tel que leur mouvement est uniforme. Mêmes questions qu'en a) et b)



a-



<u>Système</u> {B}
<u>Forces extérieures</u>

- poids de B, $\vec{P}_B$

- réaction normale du sol sur B, $\vec{N}_B$

- action de A sur B, $\vec{F}_{A\to B}$

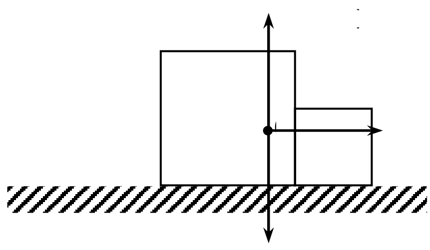
<u>Accélération</u> : A et B sont animés d'un même mouvement d'accélération $\vec{\gamma}$.

<u>PFD</u> : $\vec{P}_B + \vec{N}_B + \vec{F}_{A\to B} = m_B\vec{\gamma}$

Le poids et la réaction du sol s'équilibrant (il n'y a pas de mouvements, donc d'accélération verticaux) :

$\vec{F}_{A\to B} = m_B\vec{\gamma}$

Il nous faut donc calculer $\vec{\gamma}$.



<u>Système</u> {A+B}
<u>Forces extérieures</u> :

Poids $\vec{P}_{A+B}$

Réaction normale du sol $\vec{N}_{A+B}$

$\vec{F}$

<u>PDF</u> : $\vec{P}_{A+B} + \vec{N}_{A+B} + \vec{F} = (m_A + m_B)\vec{\gamma}$

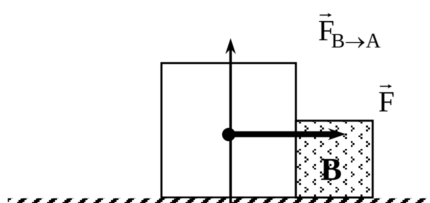
D'où $$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m_A + m_B}$$

Donc : $$\vec{F}_{A\to B} = \frac{m_B}{m_A + m_B}\vec{F}$$

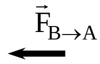
Il n'y a donc pas égalité entre $\vec{F}_{A\to B}$ *et* $\vec{F}$.

b- *D'après la loi de l'action et de la réaction, la force exercée par B sur A est égale à la force exercée par A sur B. Vérifions ceci :*

<u>Système</u> {A}



<u>Forces extérieures</u> : le poids $\vec{P}_A$, la réaction normale du sol, $\vec{N}_A$, l'action de B sur A, $\vec{F}_{B\to A}$ et $\vec{F}$.

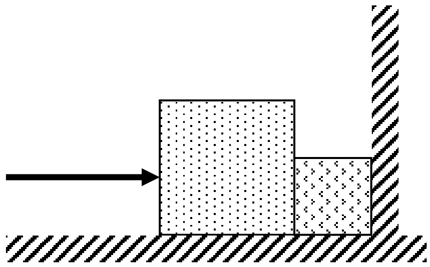


<u>PFD</u> : $\vec{P}_A + \vec{N}_A + \vec{F}_{B\to A} + \vec{F} = m_A\,\vec{\gamma}$

d'où $\vec{F}_{B\to A} = \dfrac{m_A}{m_A + m_B}\vec{F} - \vec{F} = \dfrac{-m_B}{m_A + m_B}\vec{F} = -\vec{F}_{A\to B}$

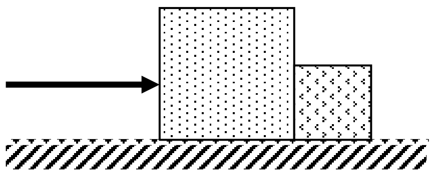
***c-** A.N.* $\|\vec{\gamma}\|$ *= 1ms^{-2} et* $\|\vec{F}_{B\to A}\| = \|\vec{F}_{A\to B}\|$ *= 30N*

***d-** Le mouvement des cubes étant arrêté par le mur,* $\vec{\gamma} = \vec{0}$. *De plus il apparaît une force supplémentaire exercée par le mur M sur B* $\vec{F}_{M\to B}$.



<u>Système</u> {B}
<u>PFD</u> : $\vec{P}_B + \vec{N}_B + \vec{F}_{A\to B} + \vec{F}_{M\to B} = \vec{0}$ *d'où* $\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{M\to B}$
<u>Système</u> {A}
<u>PFD</u> : $\vec{P}_A + \vec{N}_A + \vec{F}_{B\to A} + \vec{F} = \vec{0}$ *d'où* $\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}$
<u>Système</u> {A+B}
<u>PFD</u> : $\vec{P}_{A+B} + \vec{N}_{A+B} + \vec{F} + \vec{F}_{M\to A+B} = \vec{0}$ *d'où* $\vec{F}_{M\to A+B} = \vec{F}_{M\to B} = -\vec{F} = \vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B}$

***e-** Le mouvement des cubes est rectiligne uniforme, donc d'après le P.I.* $\vec{\gamma} = \vec{0}$. *Tout ce que nous avons écrit au d-, peut être réécrit ici en supprimant la force exercée par le mur et en ajoutant les forces de frottement avec le sol.*

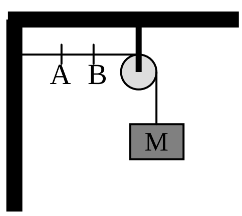


<u>Système</u> {A+B}
<u>PFD</u> : $\vec{P}_{A+B} + \vec{N}_{A+B} + \vec{F} + \vec{F}_{S\to A+B} = \vec{0}$ *d'où* $\vec{F}_{S\to A+B} = -\vec{F}$
<u>Système</u> {B}
<u>PFD</u> : $\vec{P}_B + \vec{N}_B + \vec{F}_{A\to B} + \vec{F}_{S\to B} = \vec{0}$ *d'où* $\vec{F}_{S\to B} = -\vec{F}_{A\to B}$
<u>Système</u> {A}
<u>PFD</u> : $\vec{P}_A + \vec{N}_A + \vec{F}_{B\to A} + \vec{F} + \vec{F}_{S\to A} = \vec{0}$ *d'où* $\vec{F}_{S\to A} = -(\vec{F}_{B\to A} + \vec{F})$

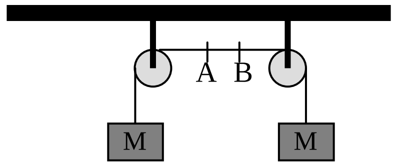
Or $\vec{F}_{S\to A+B} = \vec{F}_{S\to B} + \vec{F}_{S\to A}$ *donc* $\vec{F}_{S\to A+B} = -\vec{F} = -\vec{F}_{A\to B} - (\vec{F}_{B\to A} + \vec{F})$

D'où $\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A} \neq \vec{F}$
On vérifie à nouveau la loi de l'action-réaction.

7* Les deux schémas ci-dessous représentent des systèmes au repos dans le champ de pesanteur. Les cercles représentent des poulies. Les frottements sont considérés comme négligeables, ainsi que la masse de la corde.
1- Pour chacun des deux cas de figure présentés, on examine les systèmes suivants : {Chaque charge M prise isolément}, {la portion de corde AB}. Pour chaque cas et chaque système,



dessiner les forces exercées sur le système, puis estimer la norme de la (des) force(s) de tension de corde exercée(s) sur le système.



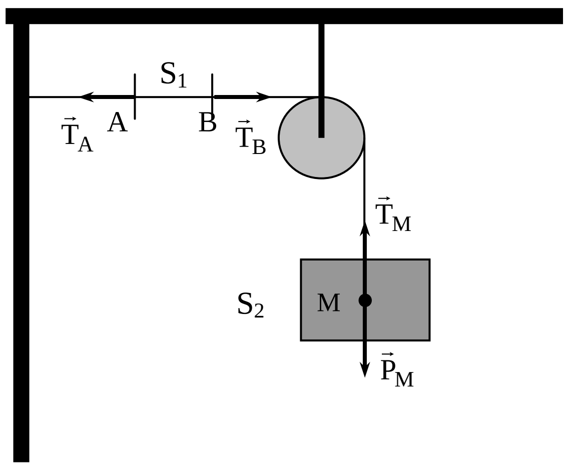
2- En conclusion, discuter les affirmations suivantes :
  a- Cas avec une seule poulie.
    - La tension de la corde vaut Mg dans la partie verticale.
    - La tension de corde est nulle dans la partie horizontale.
  b- Cas avec les deux poulies.
    - La tension de corde vaut Mg.
    - La tension de corde vaut 2Mg.

Objectifs du corrigé : Apprendre à **gérer les tensions de corde** dans les cas les plus simples où :
  - les cordes et les poulies sont de masse négligeables
  - la rotation des poulies n'est que très peu perturbée par les frottements.

ATTENTION, cet exercice ne traite que de **cas statiques** ($\vec{\gamma} = \vec{0}$); c'est quelque peu différent pour un dispositif en mouvement ($\vec{\gamma} \neq \vec{0}$) (voir ex 8 et 15).

Dans tout l'exercice, le référentiel est le référentiel terrestre supposé galiléen, et les dispositifs considérés sont à l'équilibre.

1- a-



* *<u>système</u> S_1 = {portion de corde AB}*
  Poids négligé
  Forces de tension de corde exercées sur S_1 par :
    - la portion de corde à gauche de A : $\vec{T}_A$
    - la portion de corde à droite de B : $\vec{T}_B$

<u>PFD</u> à l'équilibre : $\vec{T}_A + \vec{T}_B = \vec{0}$ *d'où* $\vec{T}_A = -\vec{T}_B$

** *<u>système</u> S_2 = {M}*
  Poids $\vec{P}_M = M\,\vec{g}_0$
  Force de tension de corde : $\vec{T}_M$

<u>PFD</u> à l'équilibre : $\vec{P}_M + \vec{T}_M = \vec{0}$

<u>Gestion des cordes et de la poulie</u> :
  -i Comme la corde est tendue et de masse négligeable, la norme des forces de tension de corde est constante :
    - tout le long du segment de corde entre le mur et la poulie, et vaut $\|\vec{T}_A\| = \|\vec{T}_B\|$
    - tout le long du segment de corde entre la poulie et M, et vaut $\|\vec{T}_M\|$

  -ii De plus, les frottements à l'axe de la poulie étant négligeables, la norme des tensions de corde de part et d'autre de la poulie sont identiques, donc : $\|\vec{T}_M\| = \|\vec{T}_A\| = \|\vec{T}_B\| = \|\vec{P}_M\| = M\,g_0$

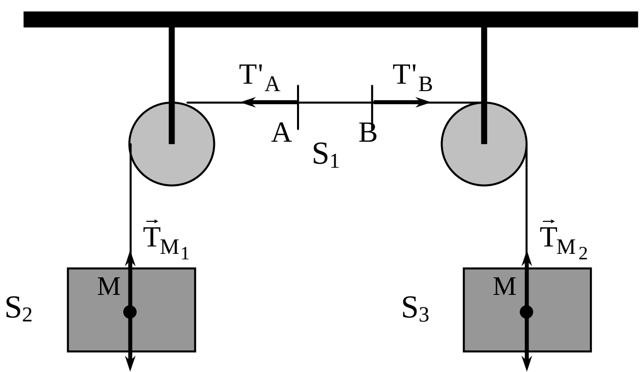
b-

* *<u>système</u> S_1 = {portion de corde AB}*
  Poids négligé
  Forces de tension de corde exercées sur S_1 par :
    - la portion de corde à gauche de A : $\vec{T}'_A$
    - la portion de corde à droite de B : $\vec{T}'_B$

<u>PFD</u> à l'équilibre : $\vec{T}'_A + \vec{T}'_B = \vec{0}$ *d'où* $\vec{T}'_A = -\vec{T}'_B$

** *<u>système</u> S_2 = {M_2}; masse M*
  Poids : $\vec{P}_{M_2} = M_2\,\vec{g}_0 = M\,\vec{g}_0$
  Force de tension de corde : $\vec{T}_{M_2}$

<u>PFD</u> à l'équilibre :
  $\vec{P}_{M_2} + \vec{T}_{M_2} = \vec{0}$ *d'où* $\vec{P}_{M_2} = -\vec{T}_{M_2}$



*** <u>système</u> $S_3 = \{M_3\}$; masse M*

Poids : $\vec{P}_{M_3} = M_3\,\vec{g}_0 = M\,\vec{g}_0$

Force de tension de corde : $\vec{T}_{M_3}$

<u>PFD</u> à l'équilibre :

$\vec{P}_{M_3} + \vec{T}_{M3} = \vec{0}$ *d'où* $\vec{P}_{M_3} = -\vec{T}_{M_3}$

<u>Gestion des cordes et de la poulie</u> : (voir a-)

-i La corde est tendue, de masse négligeable donc la norme des forces de tension de corde est constante :

- *tout le long du segment de corde entre les deux poulies, et vaut* $\|\vec{T}'_A\| = \|\vec{T}'_B\|$
- *tout le long du segment de corde entre la poulie 1 et M_1, et vaut* $\|\vec{T}_{M_1}\| = M\,g_0$
- *tout le long du segment de corde entre la poulie 2 et M_2, et vaut* $\|\vec{T}_{M_2}\| = M\,g_0$

-ii De plus, les frottements à l'axe de la poulie étant négligeables, la norme des tensions de corde de part et d'autre des poulies 1 et 2 sont identiques, donc :

- *poulie 1 :* $\|\vec{T}_{M_1}\| = \|\vec{T}'_A\|$
- *poulie 2 :* $\|\vec{T}_{M_2}\| = \|\vec{T}'_B\|$

Donc, toutes les tensions de corde sont égales et valent $M\,g_0$ *:* $\|\vec{T}'_A\| = \|\vec{T}'_B\| = \|\vec{T}_{M_1}\| = \|\vec{T}_{M_2}\| = M\,g_0$

2-

a- *<u>Cas avec une seule poulie</u>.*

- La tension de la corde vaut Mg dans la partie verticale. OUI

- La tension de corde est nulle dans la partie horizontale. NON

b- *<u>Cas avec les deux poulies</u>.*

- La tension de corde vaut Mg. OUI

- La tension de corde vaut 2Mg. NON

<u>Remarques :</u>

Lorsque le système est en mouvement non-rectiligne uniforme comme dans l'exercice 8 :

** les conditions pour écrire que la tension de corde est la même tout le long de la corde, ne sont plus les mêmes :*

*- il faut également que la **corde** soit **inextensible**, lorsqu'on raisonne sur une portion de corde.*

*- pour ce qui est des tensions de part et d'autre d'une poulie, il faut de plus que la **poulie** ait une **masse négligeable**, sinon sa rotation non-uniforme nécessite un effort.*

** Les valeurs des tensions calculées ici ne sont plus valables car la RFD s'écrit alors :*

$\vec{T}$ + *autres forces* = $m_{syst}\,\vec{\gamma}_{syst}$ *et non* $\vec{0}$ *: **Le système n'est plus à l'équilibre**.*

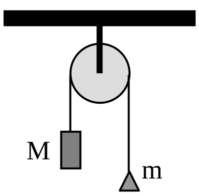
(où $\vec{T}$ est la force de tension de corde)

8**

Machine d'Atwood

Dans ce système mécanique, on négligera tous les frottements, ainsi que la masse de la poulie et de la corde. La corde est inextensible. M > m.

Calculer l'accélération acquise par les masses M et m lorsqu'on laisse évoluer librement le système.



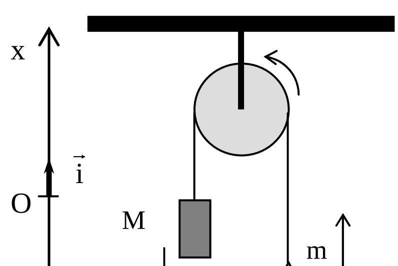
<u>Référentiel</u> : terrestre supposé galiléen (cf exo2)

<u>Mouvements</u> :

M : rectiligne, vertical, vers le bas (M est le plus lourd)

m : rectiligne, vertical, vers le haut

M et m sont liés par une corde tendue, inextensible. Donc si M descend de Δx en un temps Δt, m monte d'autant dans le même temps.



Ils ont donc la même vitesse en norme et direction (sens opposé) à tout instant. La norme des vitesses variant de la même façon (les directions et sens ne changent pas), Leurs accélérations seront donc égales en norme et direction, et opposées en sens $\vec{\gamma}_M = -\vec{\gamma}_m$. Si On note $\gamma = \|\vec{\gamma}_M\| = \|\vec{\gamma}_m\|$ la norme des accélérations, alors $\vec{\gamma}_M = -\gamma\,\vec{i}$ et $\vec{\gamma}_m = \gamma\,\vec{i}$.

Repère : $R(O, \vec{i})$

Choix du système à étudier : Si l'on choisi {M + m} comme système, alors on écrira le Principe Fondamental de la Dynamique **pour le centre d'inertie** *de M et m. Comme M descend et m monte, le mouvement de leur centre d'inertie ne nous informera en rien sur le mouvement de M et celui de m. Ce système n'est donc pas intéressant (ainsi que tout autre système incluant des éléments fixes comme les poulies). Les seuls systèmes qui nous renseignent sur le mouvement de M et sur celui de m, sont respectivement {M} et {m}*

Système {M} de masse M

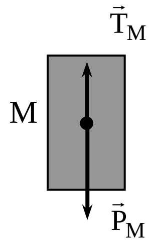
Forces extérieures :

A distance : Poids $\vec{P}_M = -M\,g_0\,\vec{i}$

De contact : Tension de la corde $\vec{T}_M = \|\vec{T}_M\|\,\vec{i}$

PFD : $\vec{P}_M + \vec{T}_M = M\,\vec{\gamma}_M$

Projection sur Ox : - M g_0 + $\|\vec{T}_M\|$ = - M γ (1)



Système {m} de masse m

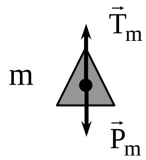
Forces extérieures :

A distance : Poids $\vec{P}_m = -m\,g_0\,\vec{i}$

De contact : Tension de la corde $\vec{T}_m = \|\vec{T}_m\|\,\vec{i}$

PFD : $\vec{P}_m + \vec{T}_m = M\,\vec{\gamma}_m$

Projection sur Ox : - m g_0 + $\|\vec{T}_m\|$ = + m γ (2)



Nous avons donc un système de deux équations, (1) et (2), avec 3 inconnues γ, $\|\vec{T}_m\|$ et $\|\vec{T}_M\|$, et seule γ nous intéresse.

Gestion des cordes et de la poulie : Comme la corde est tendue, inextensible et de masse négligeable, la norme de la tension de la corde est la même sur tout le brin de corde entre M et la poulie, c'est à dire $\|\vec{T}_M\|$; il en est de même pour la norme de la tension entre m et la poulie, qui vaut $\|\vec{T}_m\|$. D'autre part, si les frottements sont très faibles à l'axe de la poulie et que la poulie a une masse très faible (pas d'effort à fournir pour faire tourner la poulie), la tension de la corde sera identique de part et d'autre de la poulie. (On remarquera qu'il faut fournir un effort plus important pour mettre en rotation une poulie lourde que pour faire tourner une poulie légère).
En faisant toutes ces hypothèses, on peut alors écrire que la norme de la tension est la même tout le long de la corde, et que par conséquent $\|\vec{T}_m\| = \|\vec{T}_M\| = T$.
Le système a résoudre n'a plus que deux inconnues :

$$\begin{cases} -M g_0 + T = -M\gamma \\ -m g_0 + T = +m\gamma \end{cases}$$

en éliminant T, on obtient : $(M-m)\,g_0 = (M+m)\,\gamma$

D'où $\gamma = \dfrac{M-m}{M+m}\,g_0$ *et donc* $\vec{\gamma}_m = \dfrac{M-m}{M+m}\,g_0\,\vec{i} = -\vec{\gamma}_M$

Vérifications du résultat :

- Si M = m, alors $\vec{\gamma}_m = -\vec{\gamma}_M = \vec{0}$. D'après le principe d'inertie, les deux masses seront immobiles en équilibre si elles étaient immobiles au départ (et en mouvement rectiligne uniforme si on leur donne une vitesse au départ). Le

cas de deux masses égales en équilibre, est une situation que l'on appréhende assez bien intuitivement. Envisager ce cas particulier et facile, est une manière de contrôler le résultat obtenu.
- On constate que le signe de γ, qui est une norme, est bien positif comme il se doit.

<u>A vous de contrôler</u> :
- Envisager également le cas m=0 : que doit on obtenir intuitivement ? Est-ce cohérent avec le résultat trouvé ?
- vérifier que γ est bien homogène à une accélération.
- idem avec M < m . Quel est le problème ?
- Comparer γ et g_0 : qu'en pensez-vous ? Quel peut être l'usage de la machine d'Atwood ?

<u>Prolongement</u> : Calculer la tension de corde et comparez-la avec les poids de M et m. En reprenant les résultats de l'exercice 7, comparez les tensions de corde lorsqu'il y a ou non mouvement. Examinez le cas particulier d'un mouvement alors que M=m.

9** - *Exercice de tronc commun*
La situation expérimentale suivante décrit une technique de mesure de coefficients de frottement.
Un objet (prenons un cube) de masse m est posé sur un plan incliné. On peut faire varier l'inclinaison du plan incliné, que l'on mesure par l'angle aigu α entre le plan incliné et l'horizontale. Au début, le plan est très peu incliné, et le cube ne glisse pas. On augmente progressivement l'angle α, jusqu'à ce que le cube commence à glisser, ce qui arrive lorsque l'inclinaison atteint la valeur α_0. Pour cette valeur α_0, le cube se met donc en mouvement et glisse ensuite avec une accélération constante γ_0.
1- Ecrire l'expression de la force de frottement dans les situations suivantes :
a- la situation statique pour $\alpha \approx \alpha_0$ (en fait α est très légèrement inférieur à α_0).
b- la situation dynamique pour $\alpha = \alpha_0$.
c- $\alpha > \alpha_0$ (dynamique).
d- $\alpha < \alpha_0$ (statique).
2- Expliquer pourquoi le cube ne glisse pas au début, et pourquoi il se met soudain en mouvement. Pourquoi le mouvement se fait il avec une accélération constante?
3- Pour les cas a- et b-, écrire le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'expression des coefficients de frottements statique f_s et dynamique f_d.
4- A.N. $\alpha_0 = 28°$; $\gamma_0 = 1.5 ms^{-2}$. Lequel des deux coefficients est le plus grand ? Est-ce en accord avec la situation expérimentale décrite? Ce résultat vous paraît il pouvoir correspondre à une situation réelle?

1- et 2-
<u>Force de frottement de type solide/solide</u>
Cette force est due au contact entre le mobile considéré (le cube) et un autre objet (le plan incliné qui sert de support au cube). Cette force n'existe que s'il y a mouvement le long de la surface de contact dans le cas dynamique, ou bien s'il y a une velléité de mouvement dans le cas statique.
- Direction : celle du mouvement (donc parallèle au plan incliné)
- Sens : opposé à celui du mouvement.
- Intensité :
** <u>cas statique</u> : l'intensité de la force de frottement statique s'adapte pour équilibrer les autres forces et empêcher le mouvement.*
***a-** A la limite de l'équilibre, c'est à dire lorsque l'angle d'inclinaison atteint 28°, la force de frottement statique est maximale. Elle est proportionnelle à la norme de la réaction normale $\vec{R}$ que le plan incliné exerce sur le cube, et au coefficient de frottement statique f_{stat} : $\left\|\vec{F}_{\text{statique max}}\right\| = f_{stat}\left\|\vec{R}\right\|$*
***d-** Lorsque $\alpha < \alpha_0$, le cube est immobile et $\left\|\vec{F}_{\text{statique}}\right\| < f_{stat}\left\|\vec{R}\right\|$, telle qu'elle équilibre les autres forces dans la direction parallèle au plan incliné.*

** <u>cas dynamique</u> :*
***b-** A la limite du mouvement, lorsque le cube tend à glisser, $\alpha = 28°$, la force de frottement dynamique est proportionnelle à la norme de la réaction normale $\vec{R}$ et au coefficient de frottement dynamique f_{dyn} : $\left\|\vec{F}_{\text{dynamique}}\right\| = f_{dyn}\left\|\vec{R}\right\|$*
***c-** Lorsque $\alpha > \alpha_0$, le cube glisse et la force de frottement est $\left\|\vec{F}_{\text{dynamique}}\right\| = f_{dyn}\left\|\vec{R}\right\|$.*

Donc, dans le cas dynamique on écrit toujours $\left\|\vec{F}_{dynamique}\right\| = f_{dyn}\left\|\vec{R}\right\|$. *On ne séparera donc plus en 2 cas dans la suite.*

<u>Attention</u> : Dans le cas présent $\left\|\vec{R}\right\|$ *dépend de la valeur de* α *(voir l'expression de* $\left\|\vec{R}\right\|$ *ci-dessous). La force de frottement n'est donc constante au cours du mouvement, que si* α *est lui-même constant.*

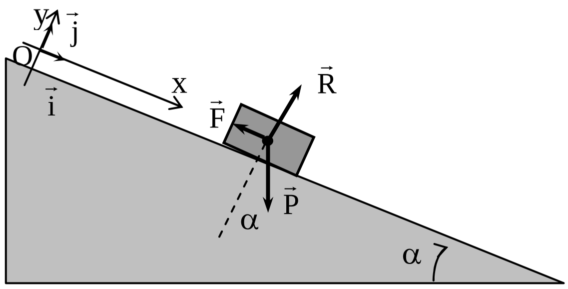
3-

<u>Référentiel</u> : terrestre galiléen (voir exo2)

<u>Repère</u> : $R(O,\vec{i},\vec{j})$

<u>Système</u> : le cube de masse m constante

<u>Forces</u> :



Poids $\vec{P} = m\,g_0\left(\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j}\right)$

Réaction normale du plan incliné $\vec{R} = \left\|\vec{R}\right\|\vec{j}$

Force de frottement :

cas statique $\vec{F} \le -f_{stat}\left\|\vec{R}\right\|\vec{i}$

cas dynamique $\vec{F} = -f_{dyn}\left\|\vec{R}\right\|\vec{i}$

<u>PFD</u> : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{\gamma}$

(le cube ne décolle pas du plan incliné donc $\gamma_y = 0$, *et* $\vec{\gamma} = \gamma_x\,\vec{i} + \gamma_y\,\vec{j} = \gamma_x\,\vec{i}$ *)*

proj. PFD sur Ox :

$m\,g_0\,\sin\alpha - \left\|\vec{F}_{stat}\right\| = 0$ — *cas statique* $\alpha < \alpha_0$

$m\,g_0\,\sin\alpha - f_{stat}\left\|\vec{R}\right\| = 0$ — *cas statique limite* $\alpha = \alpha_0$

$m\,g_0\,\sin\alpha - f_{dyn}\left\|\vec{R}\right\| = m\,\gamma_x$ — *cas dynamique*

proj. PFD sur Oy :

$-m\,g_0\,\cos\alpha + \left\|\vec{R}\right\| = m\,\gamma_y = 0$ — *dans tous les cas*

Cette dernière équation permet de trouver $\left\|\vec{R}\right\| = m\,g_0\,\cos\alpha$

D'où :

- *cas statique limite* $\alpha = \alpha_0$: $f_{stat} = \dfrac{m\,g_0\,\sin\alpha_0}{m\,g_0\,\cos\alpha_0} = \mathrm{tg}\alpha_0$

$$\left\|\vec{F}_{stat\,max}\right\| = f_{stat}\left\|\vec{R}\right\| = m\,g_0\,\sin(\alpha_0)$$

- *cas statique* $\alpha < \alpha_0$: $\left\|\vec{F}_{stat}\right\| = m\,g_0\,\sin\alpha < \left\|\vec{F}_{stat\,max}\right\| = m\,g_0\,\sin(\alpha_0)$

- *cas dynamique :* $\gamma_x = g_0\,\sin\alpha - g_0\,f_{dyn}\cos\alpha$

d'où $f_{dyn} = \dfrac{g_0\,\sin\alpha - \gamma_x}{g_0\,\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \dfrac{\gamma_x}{g_0\,\cos\alpha}$

4- A.N.

$f_{stat} = 0{,}53$ *(pas d'unité : ces coefficients sont sans dimension)*

En prenant $\gamma = 1{,}5\,ms^{-2}$ *pour* $\alpha = \alpha_0 = 28°$ *, on trouve* $f_{dyn} = 0{,}36$

<u>Remarque</u> :Les coefficients dépendent entre autre de la nature des matériaux en contact. On remarque ici que $f_{stat} > f_{dyn}$ *, ce qui est le cas pour nombre de matériaux. Les frottements statiques sont alors plus importants que les frottements dynamiques et, chose que vous pouvez vérifier dans la vie de tous les jours, il est plus difficile de*

mettre le mobile en mouvement ("vaincre" les frottements statiques) que de le maintenir en mouvement ("vaincre" les frottements dynamiques).

10* Dans le vide, tous les corps, lâchés dans des conditions identiques, tombent avec un même mouvement dans un champ de pesanteur. Qu'en est il dans l'air ?
Supposez que l'on dispose de deux billes de plastique creuses identiques. On rempli l'une de pâte à modeler, la seconde restant vide. Puis on les laisse tomber en chute libre dans l'air dans des conditions identiques, et telles que la force de frottement est du type -k $\vec{v}$ ($\vec{v}$ est la vitesse du corps dans l'air. k est le coefficient de frottement qui dépend de la forme du corps, des caractéristiques de sa surface (plus ou moins lisse, etc…) et de la viscosité du fluide).
1- Justifiez le fait que, dans le vide, les deux billes touchent le sol simultanément.
2- Par le raisonnement, sans poser d'équations ou de calculs, donner votre avis a priori : dans l'air, les deux billes atteignent-elles le sol en même temps? Si non, laquelle atteint le sol en premier? Argumentez.
3- Utilisez le Principe Fondamental de la Dynamique pour écrire l'expression de l'accélération d'une bille dans l'air. Les accélérations des deux billes sont-elles identiques? Développer le raisonnement pour conclure : dans quel ordre touchent elles le sol? Le cas échéant, critiquez vos réponses au 1- et 2-. Etait il aisé de conclure par simple raisonnement?

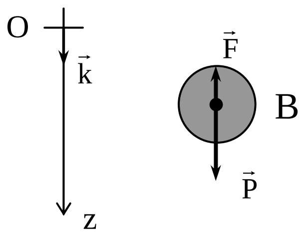
1- *Dans le vide, une bille quelconque de masse m est soumise qu'à son poids :* $\vec{P} = m\,\vec{g}_0$

En écrivant le PFD pour le système bille : $\vec{P} = m\,\vec{\gamma}_B$

L'accélération est donc $\vec{\gamma}_B = \vec{g}_0$

L'accélération d'une bille quelconque ne dépend donc pas de sa masse (pas plus que de sa forme, ou de tout autre caractéristique).

3-
<u>Référentiel</u> : terrestre galiléen (cf exo2)
<u>Système</u> : bille B quelconque de masse m
<u>Repère</u> : R(O, $\vec{k}$)



<u>Forces</u> :

Poids $\vec{P} = m\,\vec{g}_0 = m\,g_0\,\vec{k}$

Frottements avec l'air $\vec{F} = -\kappa\,\vec{v}$

où $\vec{v} = \|\vec{v}\|\,\vec{k}$ *est la vitesse de la bille, et κ le coefficient de frottement visqueux entre la bille et l'air.*

<u>PFD</u> : $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{\gamma}_B$

projection sur Oz : $m\,g_0 - \kappa\,\|\vec{v}\| = m\,\overline{\gamma}_B$ *(avec* $\vec{\gamma}_B = \overline{\gamma}_B\,\vec{k}$ *)*

D'où $\overline{\gamma}_B = g_0 - \dfrac{\kappa}{m}\|\vec{v}\|$

<u>Conclusion</u> : Lorsque l'on lâche deux billes de masses différentes m et M, elles ont au départ une vitesse nulle, et donc la même accélération g_0. Un court instant plus tard, elles ont toutes deux acquis une vitesse, et la force de frottement commence à agir sur la bille. L'expression trouvée pour l'accélération, montre que la force de frottement fait baisser l'intensité de l'accélération et que son action est d'autant plus faible que la masse de la bille est grande.
Par conséquent, le mouvement de la bille la plus lourde sera moins affecté par les frottements. Elle atteindra le sol en premier.

<u>Remarque</u> : Il est difficile d'arriver à cette conclusion par un raisonnement correct sans poser les équations.

11***-*Exercice de tronc commun*

Une automobile de masse 1 tonne aborde un virage circulaire de rayon 50m, à la vitesse de 144km/h. *On rappelle que le vecteur accélération dans le cas d'un mouvement circulaire* ***uniforme*** *de vitesse de norme v, a pour norme v^2/R, où R est le rayon du cercle, et qu'il est dirigé vers le centre du cercle (voir ultérieurement les cours et TD de cinématique).*La route étant entièrement gelée, de quel angle devrait être relevé le virage pour que la voiture ne dérape pas?

Indications **:**

0- Définir le référentiel, le système.

1- Commencer par une description précise du mouvement de la voiture lorsqu'elle ne dérape pas : préciser la forme de la trajectoire, l'orientation de la trajectoire dans l'espace (dans quel plan?), le rythme du mouvement (uniforme, accéléré, etc…). Choisir ensuite un repère et un système de coordonnées bien adaptés pour décrire cette trajectoire, faire un dessin, puis écrire le vecteur accélération dans ce repère.

2- Faire le bilan des forces extérieures appliquées à la voiture. Dans quel plan de l'espace sont elles situées? Est-ce le même plan que pour la trajectoire?

3- Ecrire la relation fondamentale de la dynamique? Quelle est la direction, le sens, de la résultante des forces? Dessiner ou redessiner les forces en respectant bien la contrainte décrite ci-dessus.

4- Si vous avez bien positionné les différents éléments, il ne vous reste qu'à effectuer les projections et conclure.

Référentiel : terrestre supposé galiléen (cf exo 2).

Système : l'automobile A - masse $m = 1\ t = 10^3 kg$

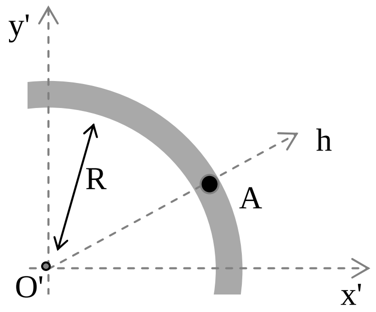
Mouvement : Si la voiture ne dérape pas, elle reste sur la route, et sa trajectoire à la forme du virage : son mouvement est circulaire horizontal, de rayon R = 50m , de centre O. De plus, le mouvement est uniforme de vitesse constante v_0 = 144km/h = 40m/s.

(Le virage étant relevé, la forme de la route est conique, d'où de fortes analogies avec le problème 11ter.)

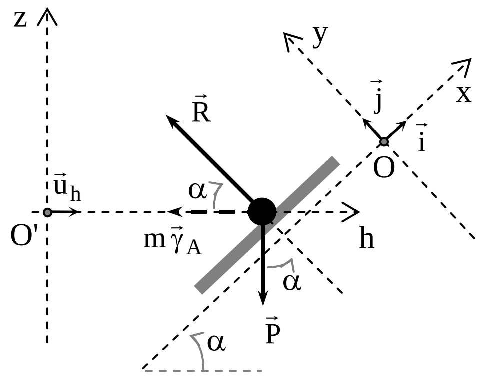
Repères :

- Le repère R'(O',x',y',z') permet de formaliser le mouvement circulaire horizontal. Dans ce repère, On défini un axe O'h, muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}_h$ qui tourne avec la voiture A.

- Ce repère n'est pas adéquat pour décrire les forces qui s'exercent sur la voiture A : le poids de la voiture et la réaction normale de le route sont dans le plan vertical. On défini donc un autre repère $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ qui rend compte du fait que la route est relevée.



Coupe horizontale dans le plan x'O'y'



Coupe verticale dans le plan hO'z'

Accélération

Dans R' : $\vec{\gamma}_A = -\dfrac{v_0^2}{R}\vec{u}_h$ *centripète dirigée vers O'.*

Dans R : $\vec{\gamma}_A = \dfrac{v_0^2}{R}\left(-\cos\alpha\ \vec{i} + \sin\alpha\ \vec{j}\right)$

Forces :

- Interactions à distance :

Poids de la voiture $\vec{P} = m\,g_0\left(-\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j}\right)$

- Forces de contact :

Réaction normale de la route $\vec{R} = \left\|\vec{R}\right\|\vec{j}$

Frottements entre auto et route : Non

<u>PFD</u> : $\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{\gamma}_A$

IMPORTANT : la résultante des forces extérieures est parallèle à $\vec{\gamma}_A$ *. Elle est donc* ***horizontale****.*

<u>Projection PFD sur Ox</u> : $-m\,g_0\sin\alpha = -m\dfrac{v_0^2}{R}\cos\alpha$

D'où $\text{tg}\alpha = -\dfrac{v_0^2}{R\,g_0}$

A.N. $\alpha = 73°$

12*

Un canon de masse M_C tire un boulet de masse m_B. Le boulet part horizontalement avec une vitesse v_0.
On fera l'hypothèse que tous les frottements sont négligeables.
a) Décrire les mouvements du boulet et du canon juste après le tir en justifiant votre réponse.
b) Calculer la vitesse de recul du canon en fonction de m_B, M_C et v_0.

<u>Généralités</u>

Dans ce genre de problème, l'astuce est de se rendre compte que :

- au départ (avant le tir), le système S composé des deux éléments {boulet + canon} est au repos dans un référentiel R donné galiléen.

- à la suite d'un événement E (la mise à feu du canon), les 2 éléments composant le système S (le boulet, le canon) se mettent en mouvement sous l'action de forces ***intérieures*** *à ce système.*

Autrement dit, les forces extérieures à S n'ont pas changé : on fait donc appel au Principe d'Inertie (à condition que R soit bien galiléen), pour affirmer que le centre de masse du système n'a pas bougé dans le référentiel R. Le Principe fondamental de la dynamique se traduit alors par la conservation de la quantité de mouvement de S :

$\sum\vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{p}_{syst}}{dt} = \vec{0}$ *d'où* $\vec{p}_{syst} = \vec{cte}$.

Il suffit ensuite d'écrire que le vecteur quantité de mouvement est le même AVANT l'événement E qu'APRES, et d'exploiter le fait que la quantité de mouvement du système est la somme des quantités de mouvement de chacun des éléments.

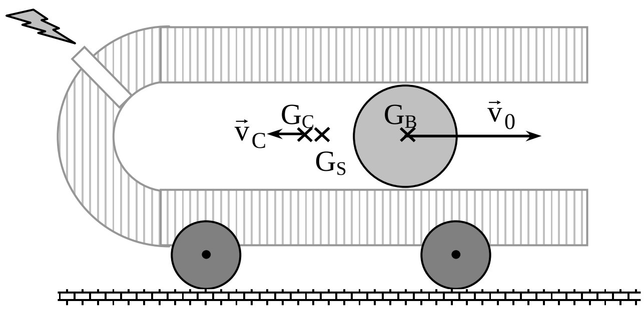
a)

<u>Référentiel</u> terrestre galiléen (voir exo2)

<u>Système</u> : S = {boulet + canon} , centre de masse G_S

masse $M_{totale} = M_C + m_B$

centre de masse G_S.



<u>Evénement</u> : E = mise à feu du canon

à tout instant :

$\vec{p}_S = (m_B + M_C)\,\vec{V}_{G_S} = \vec{p}_B + \vec{p}_C = m_B\,\vec{v}_B + M_C\,\vec{v}_C$

<u>avant E</u> : le canon et le boulet, donc le système S, sont au repos.

D'après le PFD, la quantité de mouvement de mouvement de S, mais aussi celle des systèmes {boulet} et {canon}, sont nulles. La somme des forces extérieures pour chacun de ces systèmes est nulle.

$\vec{v}_{C\,avant} = \vec{v}_{B\,avant} = \vec{V}_{G_S\,avant} = \vec{0}$ *donc* $\vec{p}_{S\,avant} = \vec{0}$ *et* $\sum_{avant}\vec{F}_{ext\,à\,S} = \dfrac{d\,\vec{p}_{S\,avant}}{dt} = \vec{0}$

<u>après E</u>: Le boulet n'est plus au repos, et on verra que le canon se met également en mouvement (effet de recul). Mais les forces mises en jeu lors de l'explosion sont intérieures au système. Par conséquent, D'après le PFD, le vecteur quantité de mouvement de S est le même "avant E" et "après E"

$$\sum_{\text{après}} \vec{F}_{\text{ext à S}} = \sum_{\text{avant}} \vec{F}_{\text{ext à S}} = \vec{0} = \frac{d\,\vec{p}_S}{dt} \qquad \textit{d'où} \qquad \vec{p}_{S\text{ après}} = \vec{0}$$

Or la vitesse du boulet "après E" est connue : $\vec{v}_0$

Celle du canon "après E", inconnue sera notée : $\vec{v}_C$

D'où $\vec{p}_{S\text{ avant}} = \vec{0} = \vec{p}_{S\text{ après}} = m_B\ \vec{v}_0 + M_C\ \vec{v}_C$ *donc* $\vec{v}_C = -\dfrac{m_B}{M_C}\ \vec{v}_0$

***Attention** : "après E" ne désigne que la durée pendant laquelle le boulet se déplace dans le canon : lorsque le boulet sort, la réaction que le canon exerçait sur le boulet pour compenser son poids n'existant plus, la résultante des forces extérieures n'est plus nulle …(On pourrait cependant n'effectuer le raisonnement que sur la composante horizontale de l'expression du PFD, les forces horizontales n'étant pas modifiées).*

<u>Remarques</u> :

- La vitesse de recul du canon est proportionnelle au rapport des masses m_B/M_C, mais aussi à la vitesse du boulet. Vous avez probablement vu dans un film, que le phénomène de recul d'un canon n'est pas du tout négligeable, principalement à cause de la vitesse de l'obus. C'est pourquoi les canons modernes sont munis de systèmes destinés à amortir le mouvement de recul. Il n'est pas rare non plus, qu'un tireur débutant ait une épaule démise à cause du recul de son fusil.

- Ce genre de phénomène n'a pas que des applications guerrières : c'est la base de tout système de propulsion "par réaction", comme c'est le cas pour les fusées; les poulpes et autres coquilles Saint-Jacques, savent également mettre à profit la projection d'un fluide pour se déplacer.

Quelques exercices en complément.

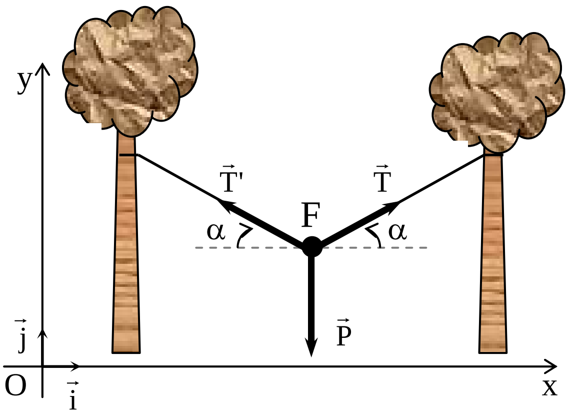
Pour vous exercer, vous trouverez ici des exercices similaires à des exercices fondamentaux proposés précédemment : cette similitude est indiquée par la mention : (cf exα).

13* Sieste en hamac (cf ex2)

Vous voulez vous reposer dans un hamac dont les cordelettes d'attaches sont usées. Si vous ne voulez pas risquer qu'elles cassent pendant la sieste, faut-il attacher le hamac pratiquement à l'horizontale ou au contraire le laisser largement pendre?

Les cordes vont casser si les cordes sont trop tendues. Il faut donc chercher la solution qui donne des tensions de corde minimales.

<u>Modélisation du problème</u> : de manière simplifiée, on décrit le flemmard dans son hamac comme un corps ponctuel suspendu par des cordes d'égale longueur. Le dispositif est donc symétrique.



<u>Référentiel</u> : terrestre (voir exo2)

<u>Système</u> : flemmard F dans son hamac ; masse M

<u>Repère</u> : $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

<u>Forces</u> :

$$\vec{P} = -M\ g_0\ \vec{j}$$
$$\vec{T} = \|\vec{T}\|\left(\cos\alpha\ \vec{i} + \sin\alpha\ \vec{j}\right)$$
$$\vec{T'} = \|\vec{T'}\|\left(-\cos\alpha\ \vec{i} + \sin\alpha\ \vec{j}\right)$$

<u>PFD</u> : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{T'} = M\ \vec{\gamma}_F$ *à l'équilibre :* $\vec{P} + \vec{T} + \vec{T'} = \vec{0}$

proj. PFD sur Ox : $\cos\alpha\left(\|\vec{T}\| - \|\vec{T'}\|\right) = 0$ *proj. PFD sur Oy :* $\sin\alpha\left(\|\vec{T}\| + \|\vec{T'}\|\right) - M\ g_0 = 0$

Ce qui donne : $\|\vec{T}\| = \|\vec{T'}\|$ *(on pouvait s'en douter à cause de la symétrie des cordes)*

Et donc $2\|\vec{T}\|\sin\alpha = M\ g_0$. *D'où* $\|\vec{T}\| = \|\vec{T'}\| = \dfrac{M\ g_0}{2\sin\alpha}$.

La tension de corde est d'autant plus faible que $\sin\alpha$ est grand.

<u>Conclusion</u> : plus le hamac pend, plus les tensions sont faibles. Il faut donc laisser pendre le hamac largement. Ce qui n'est pas particulièrement propice à la digestion…

14*** (cf ex4) Cyrano de Bergerac, dans *"l'Autre Monde, ou les Etats et Empires de la Lune"*, utilise la technique suivante pour se rendre dans la lune :

"*Je pris de l'aimant (...) et le réduisis à la grosseur d'une balle médiocre. Ensuite de ces préparatifs, je fis construire un chariot de fer fort léger... Enfin je montai dedans et lorsque je fus bien ferme et bien appuyé sur le siège, je ruai fort haut en l'air cette boule d'aimant. Or la machine de fer fut enlevée aussitôt et (...) à mesure que j'arrivais où l'aimant m'avait attiré, je rejetais aussitôt ma boule en l'air au-dessus de moi... Je vous dirai même que, tenant ma boule en main, je ne laissais pas de monter, parce que le chariot courait toujours à l'aimant que je tenais au dessus de lui.*"

Que pensez-vous de ce procédé?

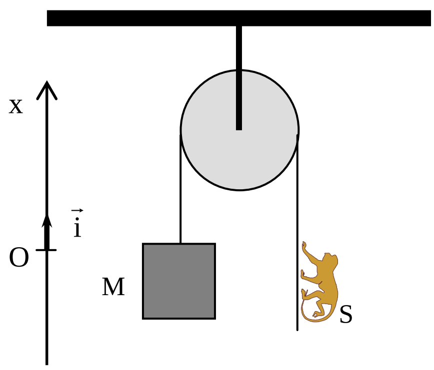
<u>Système {Chariot + Cyrano + aimant}</u>
Supposons que le chariot ait décollé (raisonnement par l'absurde).
Lorsque Cyrano lance la boule en l'air, il doit prendre un appui sur le chariot, qui réagit (loi de l'action et de la réaction). A tout instant, la boule exerce une force d'attraction sur le chariot, et réciproquement, le chariot (qui contient l'homme) exerce une force égale et opposée sur la boule. Toutes ces forces sont intérieures au système {Chariot + Cyrano + aimant}, elles ne peuvent donc pas modifier le mouvement du centre d'inertie du système.
- Dans le référentiel du chariot
Comme Cyrano bouge et comme la boule s'élève puis retombe par rapport au chariot sous l'action de la force magnétique, le système se déforme rythmiquement; le centre d'inertie se déplace par rapport au chariot, parfois vers le haut, parfois vers le bas, en repassant successivement par les mêmes positions. Inversement, le chariot doit donc avoir un léger mouvement vers le haut puis vers le bas, par rapport au centre d'inertie. Si Cyrano tient la boule dans sa main, le chariot ne bouge même plus par rapport au centre d'inertie. Quel est donc le mouvement du centre d'inertie ?
- Dans le référentiel terrestre
La seule force extérieure qui s'exerce est le poids du système (en négligeant les frottements de l'air). Par conséquent, le centre d'inertie du système est en chute libre.

Conclusion : Autrement dit, le centre d'inertie n'a pas pu décoller. Si Cyrano lance la balle et la rattrape, la seule chose qui puisse arriver est un petit sursaut du chariot par rapport au sol (il faut ajouter dans l'analyse les forces de réactions du sol, donc c'est un peu plus compliqué).

15** (cf ex 8) Une corde passe par-dessus une poulie, pendant symétriquement de chaque coté. A une extrémité est agrippé un singe, et à l'autre, en face de lui, un miroir de même poids. Effrayé par son image, le singe tente d'y échapper en grimpant le long de la corde. La corde est inextensible. On négligera les frottements ainsi que la masse de la poulie et de la corde. Que fait le miroir ?

Le problème se pose de façon très similaire à l'exercice 8 : même référentiel, même repère, même façon de choisir les systèmes, même façon de traiter les tensions de corde.

<u>Référentiel</u> : terrestre supposé galiléen
<u>Repère</u> : $R(O, \vec{i})$
<u>Mouvements</u> :
S : rectiligne, vertical
M : rectiligne, vertical



Si le singe ne grimpe pas, le système, initialement au repos, reste à l'équilibre.
Le singe en grimpant à la corde exerce une force supplémentaire sur la corde (par rapport à l'équilibre où il ne suspend que son poids) : la tension de corde devrait donc être plus importante lorsqu'il grimpe que lorsqu'il ne grimpe pas.
Comme lorsque le singe grimpe, la longueur de la corde diminue, on ne peut rien affirmer sur les mouvements du singe et du miroir, ni établir un lien a priori entre les deux mouvements comme on l'a fait pour la machine d'Atwood..
On notera donc : $\vec{\gamma}_S = \overline{\gamma}_S\ \vec{i}$ *et* $\vec{\gamma}_M = \overline{\gamma}_M\ \vec{i}$.

Remarque : $\bar{\gamma}_S$ *est une "valeur algébrique", dont le signe, lorsque nous aurons trouvé l'expression de* $\bar{\gamma}_S$ *, nous informera sur le sens du mouvement : positif, le singe monte; négatif, il descend. Idem pour M et* $\bar{\gamma}_M$ *.*

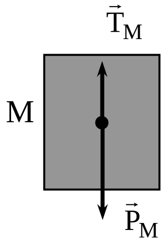
<u>Système</u> {Miroir}, masse m
<u>Forces extérieures</u> :

Poids $\vec{P}_M = -m\,g_0\,\vec{i}$

Tension de la corde $\vec{T}_M = \|\vec{T}_M\|\,\vec{i}$

<u>RFD</u> : $\vec{P}_M + \vec{T}_M = m\,\vec{\gamma}_M$

Projection sur Ox : $- m\,g_0 + \|\vec{T}_M\| = m\,\bar{\gamma}_M$ *(1)*



Remarque : Le PFD nous dit que la norme de la tension sera plus grande (faible) que le poids du miroir, si le miroir monte (descend).

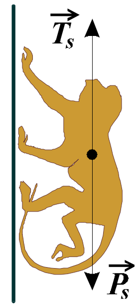
<u>Système</u> {Singe}, masse m
<u>Forces extérieures</u> :

Poids $\vec{P}_S = -m\,g_0\,\vec{i}$

Tension de la corde $\vec{T}_S = \|\vec{T}_S\|\,\vec{i}$

<u>RFD</u> : $\vec{P}_S + \vec{T}_S = m\,\vec{\gamma}_S$

Projection sur Ox : $- m\,g_0 + \|\vec{T}_S\| = m\,\bar{\gamma}_S$ *(1)*



<u>Tensions</u> : voir l'exercice 8. $\|\vec{T}_S\| = \|\vec{T}_M\| = T$

Le système d'équations devient alors :

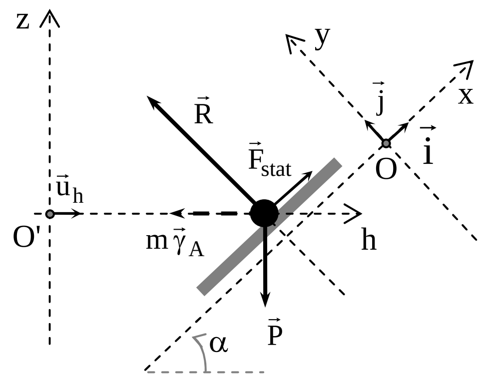
$$\begin{cases} - m\,g_0 + T = m\,\bar{\gamma}_M \\ - m\,g_0 + T = m\,\bar{\gamma}_S \end{cases}$$

en éliminant T, on trouve : $\bar{\gamma}_M = \bar{\gamma}_S$

<u>Conclusion</u> : Le miroir aura le même mouvement que le singe; si le singe monte à la corde, la corde se raccourcissant, les deux vont monter. Donc pas moyen d'échapper ainsi à son image!
Par contre si la tension de corde n'est pas la même des deux côtés, par exemple si les frottements à l'axe de la poulie ne sont pas négligeables, alors le singe réussira à grimper plus haut que le miroir.

<u>Question subsidiaire</u> : quels sont les signes de $\bar{\gamma}_M$ *et* $\bar{\gamma}_S$ *?*
(réponse : ça dépend … Si le singe monte et qu'il accélère $\bar{\gamma}_S > 0$ *. S'il décélère,* $\bar{\gamma}_S < 0$ *…S'il descend, il faut inverser les signes…)*

16* (cf ex 11)**
On reprend l'exercice 11 dans le cas où le virage est relevé d'un angle α = 30°. Quelle devrait être la force de frottement de l'automobile sur la route pour qu'il n'y ait pas de dérapage? Préciser la norme et la direction de cette force de frottement, et discuter son sens.
(Indication : il n'est pas évident de bien orienter la force de frottement a priori. Si vous n'avez pas d'idée, vous pouvez procéder ainsi : choisissez une orientation arbitraire, et faites le calcul ainsi. Le résultat obtenu est-il cohérent? Sinon, changez l'hypothèse de départ.)



Le cas est un peu plus réaliste : $\alpha = 30°$.
Le problème se pose de manière quasi identique : il faut en plus prendre en compte les frottements entre route et auto pour empêcher le dérapage latéral.

- frottements entre auto et route : frottement statique dans la direction Ox.
Attention :
** Cette force de frottement s'oppose à la composante du mouvement qui aurait lieu si la voiture dérapait, c'est à dire si la voiture sortait de la route.*
** Comme ce mouvement de dérapage n'a pas lieu, il s'agit bien d'un frottement statique.*
Comme il n'y a pas dérapage : $\|\vec{F}_{statique}\| < \|\vec{F}_{statique\ max}\| = f_{stat}\,\|\vec{R}\|$.

$\vec{F}_{statique} = \overline{F}\,\vec{i}$ *(on utilise la valeur algébrique car on ne connaît pas le sens de la force.)*

PFD : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{statique} = m\,\vec{\gamma}_A$

proj. PFD sur Ox : $-m\,g_0 \sin\alpha + \overline{F} = -m\dfrac{v_0^2}{R}\cos\alpha$ *d'où* $\overline{F} = m\left(g_0 \sin\alpha - \dfrac{v_0^2}{R}\cos\alpha\right)$

A.N. : $\overline{F}_{statique} = -22\,000\ \mathrm{N}$ *:* $\overline{F} < 0$ *, par conséquent, la force est dans le sens* $-\vec{i}$ *. Le dérapage, s'il avait lieu, se ferait en sens inverse, c'est à dire vers l'extérieur du virage.*

Analyse du résultat : On ne connaissait pas le sens de la force de frottement à priori.
- Il y a une vitesse $v_{0\ équil}$ pour laquelle la voiture tourne toute seule sans qu'il y ait besoin de frottements (cas traité par la question a-) : $\overline{F} = m\left(g_0 \sin\alpha - \dfrac{v_{0équil}^2}{R}\cos\alpha\right) = 0$

- Si la voiture a une vitesse inférieure, $\overline{F} = m\left(g_0 \sin\alpha - \dfrac{v_0^2}{R}\cos\alpha\right) > 0$ *: la force de frottement sera dirigée vers l'extérieur du virage : elle empêche un dérapage de la voiture vers l'intérieur du virage.*
- Par contre, si la voiture va trop vite, comme c'est le cas ici, la force de frottement sera orientée vers l'intérieur du virage pour empêcher un dérapage vers l'extérieur du virage $\overline{F} = m\left(g_0 \sin\alpha - \dfrac{v_0^2}{R}\cos\alpha\right) < 0$

Critique : Le dessin n'est pas correct car la somme des vecteurs représentant les forces n'est pas égale au vecteur $m\,\vec{\gamma}_A$ *. Le PFD n'est pas respecté graphiquement.*
Exercice : dessinez le schéma correct.

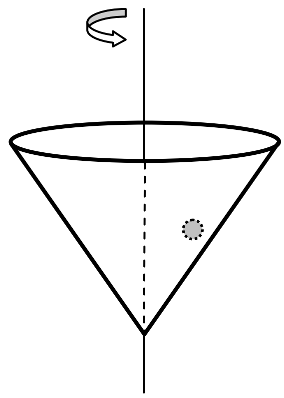
Remarque : Il y a une "autre" force de frottement entre la roue et la route, dans la direction du mouvement de la voiture : elle s'oppose au glissement de la roue sur la route (patinage) et permet donc à la voiture d'avancer. C'est LA force extérieure responsable du mouvement de la voiture.
- Dans la plupart des problèmes de mécanique du point, cette force n'est pas présentée comme une force de frottement, mais catégorisée sous des termes vagues et trompeurs tel que "force motrice" (ce qui gomme le côté "force de contact"). Le traitement détaillé du "roulement sans glissement" relève plutôt de la mécanique du solide.
- Cette force n'est pas prise en compte ici, car la voiture circule à vitesse constante, donc la résultante des forces exercées sur la voiture dans la direction du mouvement (dite "tangentielle") est nulle. (Voir Cours-TD de cinématique : l'accélération tangentielle est nulle si le module de la vitesse est constant, et par conséquent le PFD dit que la résultante des forces tangentielles est nulle également).

Prolongement : Calculer la force de réaction $\vec{R}$ *et analyser le résultat : expliquer pourquoi l'adhérence des pneus augmente lorsque la voiture accélère dans un virage.*

18*** (cf ex11) Une bille est placée dans une centrifugeuse de forme conique qui tourne autour de l'axe vertical du cône, avec une vitesse angulaire constante ω. *On rappelle que le vecteur accélération dans le cas d'un mouvement circulaire* ***uniforme*** *a pour norme* $r\omega^2$*, où r est le rayon du cercle, et qu'elle est dirigée vers le centre du cercle (voir ultérieurement les cours et TD de cinématique).*

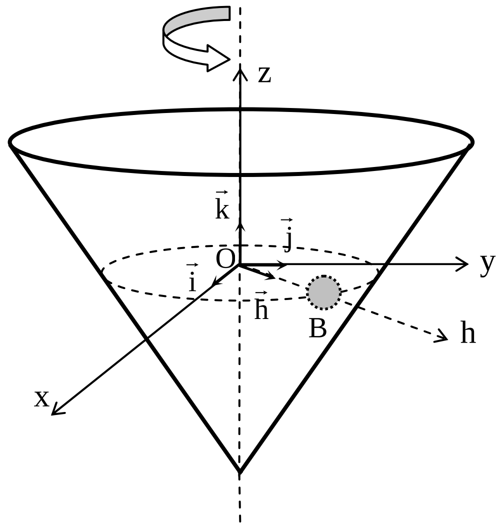
1- A quel endroit de la centrifugeuse doit on placer la bille pour qu'elle reste toujours à la même hauteur, sachant que les bords de la centrifugeuse sont inclinés d'un angle θ par rapport à l'horizontale (on négligera les frottements)?

2- Calculer la force de réaction exercée par la centrifugeuse sur la bille, puis la comparer au poids de la bille. Expliquer.



Référentiel : terrestre supposé galiléen (cf exo 2).
Système : la bille B de masse m constante

Mouvement : la bille est en équilibre relatif, c'est à dire qu'elle ne bouge pas par rapport à la centrifugeuse en rotation. Son mouvement est donc circulaire (elle reste à la même hauteur sur le cône) de rayon r (à déterminer), de centre O porté par l'axe du cône.

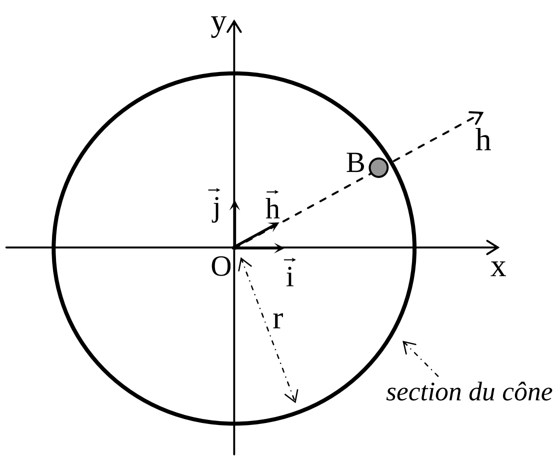


Repère :

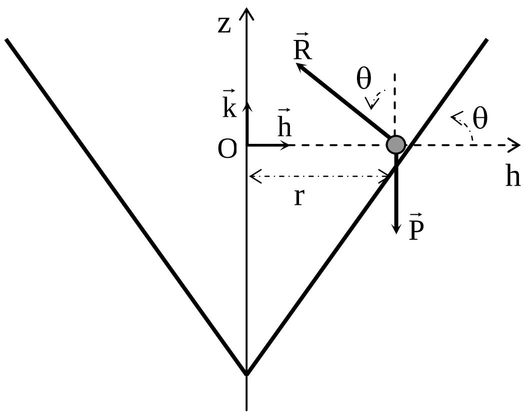
- Choix du repère : centré en O, parce qu'on visualise mieux le problème ainsi. (Mais si l'on change la valeur de ω, alors il faut choisir un nouveau repère, car la hauteur de la bille à l'équilibre relatif change).

- Il est commode de faire des dessins en coupe (plan horizontal et plan vertical) parce qu'on n'a pas à dessiner en perspective. Pour dessiner le plan vertical qui passe par la bille, on défini un axe Oh horizontal passant par la bille.

On lui adjoint un vecteur unitaire $\vec{h}$ *(pour les projections). Oh et* $\vec{h}$ *tournent avec la bille, et sont liés à un référentiel non-galiléen. Mais cela ne nous interdit ni les dessins, ni les projections.*



Coupe horizontale dans le plan xOy



Coupe verticale dans le plan hOz

Forces :

- interaction à distance : poids de la bille $\vec{P} = -m\, g_0\, \vec{k}$

- forces de contact :

- *réaction normale de la centrifugeuse* $\vec{R} = \|\vec{R}\| \left(-\sin\theta\,\vec{h} + \cos\theta\,\vec{k}\right)$

- *pas de frottements entre bille et centrifugeuse*

Accélération : $\vec{\gamma}_B = -r\,\omega^2\,\vec{h}$

PFD : $\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{\gamma}_B$ *proj. PFD sur Oh :* $-m\,g_0 + \|\vec{R}\|\cos\theta = 0$

proj. PFD sur Oz : $-\|\vec{R}\|\sin\theta = -m\,r\,\omega^2$

D'où $\|\vec{R}\| = \dfrac{m\,g_0}{\cos\theta}$ *et par conséquent* $r = \dfrac{\|\vec{R}\|\sin\theta}{m\,\omega^2} = \dfrac{g_0\,\sin\theta}{\omega^2\,\cos\theta}$

On trouve donc $r = \dfrac{g_0}{\omega^2}\,\mathrm{tg}\theta$

Conclusions

- position d'équilibre : plus la centrifugeuse tourne rapidement (ω plus grand) plus le point d'équilibre relatif est bas (r plus petit).

- force de réaction normale : elle est plus grande que le poids (car $\cos\theta < 1$), ce qui peut paraître surprenant. En fait, le schéma qui montre les forces (coupe verticale) ressemble quelque peu à un schéma de plan incliné, problème classique pour lequel la réaction est inférieure au poids. Cependant la différence entre ces deux problèmes est cruciale, car le mouvement de la bille n'est pas rectiligne vers le bas (cas du plan incliné), mais circulaire horizontal vers l'arrière. La force de "réaction", d'une part "agit" horizontalement sur la bille pour la faire tourner (sa projection horizontale donne le terme d'inertie $m\vec{\gamma}$ du PFD), et d'autre part (verticalement) elle empêche la bille de descendre en équilibrant le poids. Ce qui explique que sa norme soit supérieure au poids. D'ailleurs, on remarque que la somme vectorielle du poids et de la réaction doit être horizontale pour égaler le terme d'inertie $m\vec{\gamma}$ (le mobile tourne), alors que dans un problème de plan incliné, cette résultante des forces est parallèle au plan (le mobile descend).

19** Un cube de côté a, de masse m, flotte sur un liquide de masse volumique ρ. Les conditions sont telles que le cube ne bascule pas et qu'il garde toujours sa face inférieure horizontale. La pression de l'air ne sera pas prise en compte.

- Exprimer la force d'Archimède en fonction du degré d'immersion du cube dans le liquide.
- De combien doit il être immergé pour flotter en équilibre?
- A.N. pour un cube de glace dans de l'eau; pour un cube de glace dans de l'huile de masse volumique 0.9g/cm^3; pour un cube de plastique rempli d'eau dans de l'huile.

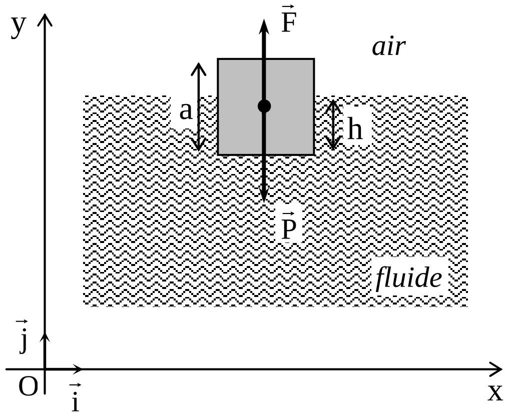
Référentiel : terrestre supposé galiléen (cf exo2).

Repère : $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

Système : Le cube

masse m , volume $V = a^3$,

masse volumique $m/V = m/a^3$



Forces

- *Force d'Archimède exercée sur le cube :*
  - ** direction et sens = verticale vers le haut (opposée au poids)*
  - ** intensité = poids du volume V_{im} de liquide déplacé*

$= V_{im}\,\rho_{fluide}\,g_0$

$= a^2\,h\,\rho\,g_0$

où h est la hauteur de cube immergée ($h \le a$).

$\vec{F} = a^2\,h\,\rho\,g_0\,\vec{j}$

- *Poids du cube* $\vec{P} = -m\,g_0\,\vec{j}$

PFD : $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{\gamma}_C$ *mais à l'équilibre* $\vec{\gamma}_C = \vec{0}$

Donc $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$ *, alors* $\|\vec{P}\| = \|\vec{F}\|$ *, ce qui donne* $a^2\,h\,\rho\,g_0 = m\,g_0$. *D'où* $h = \dfrac{m}{a^2\,\rho}$.

En écrivant $m = \rho_{cube}\, a^3$ *on peut écrire également* $h = \dfrac{\rho_{cube}}{\rho_{fluide}} a$.

A.N. Remarque : 1g/cm^3 = 10^3 kg/m^3 (unité SI)
- cube de glace dans l'eau : h = 0,9 a (les 9/10^e d'un iceberg sont immergés)
- cube de glace dans l'huile : h = a tout le cube est immergé. En théorie il va être en équilibre indifférent à n'importe quelle profondeur dans le liquide. En réalité, il y a toujours une légère différence de densité qui fait que le cube sera en surface ou au fond.
- cube d'eau (on néglige le plastique) dans l'huile : si on se laisse aller à utiliser l'expression précédente, on trouve h = 1,1 a . Or ce résultat n'est pas cohérent avec la condition h≤ a écrite précédemment. En fait l'expression trouvée est construite sur l'hypothèse que l'équilibre est réalisé. Hypothèse non valide ici car le poids du cube est plus important que la poussée d'Archimède maximale (immersion totale); le cube est donc totalement immergé (h=a) et il coule au fond.

20* Banana James (de masse m) fuit le temple maudit à bord d'une plateforme mobile ultra-légère (de masse M) qui se dirige vers un précipice à la vitesse constante $\vec{v}_0$. Le traître ayant pris soin de bien huiler les axes des roues, les frottements sont négligeables. Banana se dit qu'en courant sur la plateforme, il devrait pouvoir faire varier la vitesse de la plateforme, et ainsi limiter les risques de se rompre le cou en sautant.

a) Pourquoi peut-il en courant modifier la vitesse de la plateforme? Dans quel sens doit il courir pour ralentir la plateforme?

b) Banana court dans le sens choisi avec une vitesse constante par rapport à la plateforme. Calculer l'expression vectorielle de la nouvelle vitesse de la plateforme par rapport au sol. Banana peut-il espérer arrêter la plateforme?

c) En fin de course, Banana saute de la plateforme. Exprimer vectoriellement sa vitesse par rapport au sol. Calculer la norme de sa vitesse.

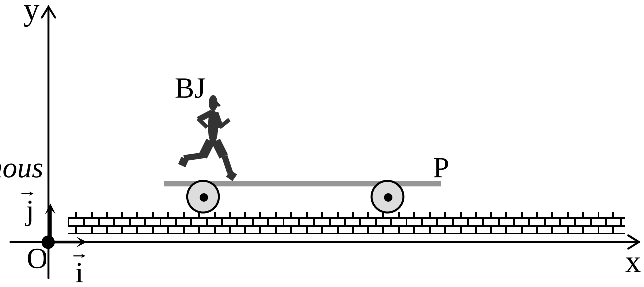
d) Conclusion : que doit faire Banana pour arriver au sol avec une vitesse minimale : sauter sans courir, ou bien en courant dans le sens où la plateforme est ralentie, ou bien en courant en sens inverse?

Indication : à partir de la question b), il est nécessaire de faire appel à des changements de référentiel très simples (cf la partie cinématique du cours sur les changements de référentiels).

a- *Lorsque Banana cours, il prend appui sur la plateforme avec son pied. La plateforme exerce sur Banana une force en réaction (frottements pour la composante horizontale) : c'est cette force qui agit sur Banana pour le faire avancer par rapport à la plateforme. Cependant la force exercée par Banana sur la plateforme, va agir sur la plateforme (système {P}) en sens inverse de la course da Banana. Banana pourra donc ralentir la plateforme en courant en sens inverse du mouvement initial de la plateforme .*

b-
Référentiel : terrestre supposé galiléen (cf exo2).
Repère : $R(O,\vec{i},\vec{j})$

Systèmes : 3 systèmes
- Banana : {BJ} de masse m (système qui nous intéresse plus particulièrement)
- La plateforme : {P } de masse M
- {P + BJ} de masse M+m



Evénement E : Banana se met à courir (phase d'accélération).
- avant E :
** Banana est immobile sur la plateforme . Sa vitesse dans R est* $\vec{v}_0$ *, celle de la plateforme.*
** La plateforme a une vitesse constante* $\vec{v}_0$
- après E :
** Banana court sur la plateforme avec une vitesse constante connue* $\vec{v}_{BJ/P}$ *dans le référentiel de la plateforme. Sa vitesse* $\vec{v}_{BJ/R}$ *dans le référentiel terrestre R est inconnue.*
** La plateforme a pris une nouvelle vitesse* $\vec{v}_{P/R}$ *dans le référentiel terrestre R.*

La cinématique des changements de référentiels nous permet d'écrire la relation lie ces 3 vitesses :
($\vec{v}_{absolue} = \vec{v}_{entraînement} + \vec{v}_{relative}$ *. Ici la vitesse d'entraînement* $\vec{v}_{P/R}$ *ne comporte pas de terme de rotation)*

$$\vec{v}_{BJ/R} = \vec{v}_{P/R} + \vec{v}_{BJ/P}$$

Donc :

- avant E, les trois systèmes ont une vitesse constante, $\vec{v}_0$ *dans le référentiel galiléen R (MRU) : d'après le Principe d'Inertie, la résultante des forces extérieures est nulle pour chacun des systèmes.*

- pendant (et après) E, la course de Banana fait apparaître une nouvelle interaction horizontale entre Banana et la plateforme (force d'action de BJ sur P + force de réaction de P sur BJ). Ces forces sont ***intérieures*** *au système {BJ + P}; elles ne modifient donc pas le bilan des forces extérieures exercées sur {BJ + P} (en l'absence de frottements entre la plateforme et le sol).*

D'après le PFD, le système {BJ + P} garde donc sa quantité de mouvement initiale à tout instant (et son MRU à la vitesse constante $\vec{v}_0$ *) :* $\vec{p}_{BJ+P\,avant} = \vec{p}_{BJ+P\,après}$.

Or $\vec{p}_{BJ+P} = \vec{p}_{BJ} + \vec{p}_P$ *à tout instant.*

Donc $\vec{p}_{BJ+P\,avant} = \vec{p}_{BJ\,avant} + \vec{p}_{P\,avant} = (m+M)\,\vec{v}_0 = \vec{p}_{BJ+P\,après} = \vec{p}_{BJ\,après} + \vec{p}_{P\,après} = m\,\vec{v}_{BJ/R} + M\,\vec{v}_{P/R}$

$$(m+M)\,\vec{v}_0 = m\,(\vec{v}_{BJ/P} + \vec{v}_{P/R}) + M\,\vec{v}_{P/R} = (m+M)\,\vec{v}_{P/R} + m\,\vec{v}_{BJ/P}$$

Connaissant $\vec{v}_{BJ/P}$ *, on peut calculer* $\vec{v}_{P/R} = \vec{v}_0 - \dfrac{m}{M+m}\,\vec{v}_{BJ/P}$.

Pour que Banana arrête la plateforme, il faudrait que $\|\vec{v}_{BJ/R}\| = \left(1 + \dfrac{M}{m}\right)\|\vec{v}_0\|$.

En supposant un facteur 10 entre les masses, $\|\vec{v}_{BJ/R}\| = 11\,\|\vec{v}_0\|$ *. Il faut courir vite!*

c*- La vitesse de Banana par rapport au sol est :* $\vec{v}_{BJ/R} = \vec{v}_{P/R} + \vec{v}_{BJ/P} = \vec{v}_0 - \dfrac{m}{M+m}\,\vec{v}_{BJ/P} + \vec{v}_{BJ/P}$

D'où $\vec{v}_{BJ/R} = \vec{v}_0 + \dfrac{M}{M+m}\,\vec{v}_{BJ/P}$.

Comme $\vec{v}_{BJ/P} = +\|\vec{v}_{BJ/P}\|\,\vec{i}$ *et* $\vec{v}_0 = +\|\vec{v}_0\|\,\vec{i}$ *:* $\|\vec{v}_{BJ/R}\| = \|\vec{v}_0\| - \dfrac{M}{M+m}\,\|\vec{v}_{BJ/P}\|$

d*- Donc la vitesse de Banana par rapport au sol est maximale si* $\vec{v}_{BJ/P}$ *est dans le même sens que* $\vec{v}_0$ *, minimale si* $\vec{v}_{BJ/P}$ *est en sens inverse de* $\vec{v}_0$ *.*

<u>Conclusion</u> : pour limiter les risques de casse (vitesse minimale par rapport au sol), c'est donc une très mauvaise idée que de vouloir ralentir la plateforme….

21** Deux pêcheurs, un gros de masse M et un maigre de masse m, sont assis l'un à l'avant et l'autre à l'arrière d'une barque symétrique de longueur L et masse M_B. La barque est initialement immobile. Les deux pêcheurs échangent leurs places. Un observateur sur la berge voit alors la barque se déplacer. Expliquer pourquoi et calculer la distance dont elle se déplace.
(on supposera que les frottements de la barque sur l'eau sont nuls)

<u>Référentiel</u> terrestre galiléen (voir exo2)
<u>Repère</u> : $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ *lié au quai*
<u>Système</u> : S = {barque + gros pêcheur + petit pêcheur} , masse $M_{totale} = M_B + M + m$
centre de masse G_S.

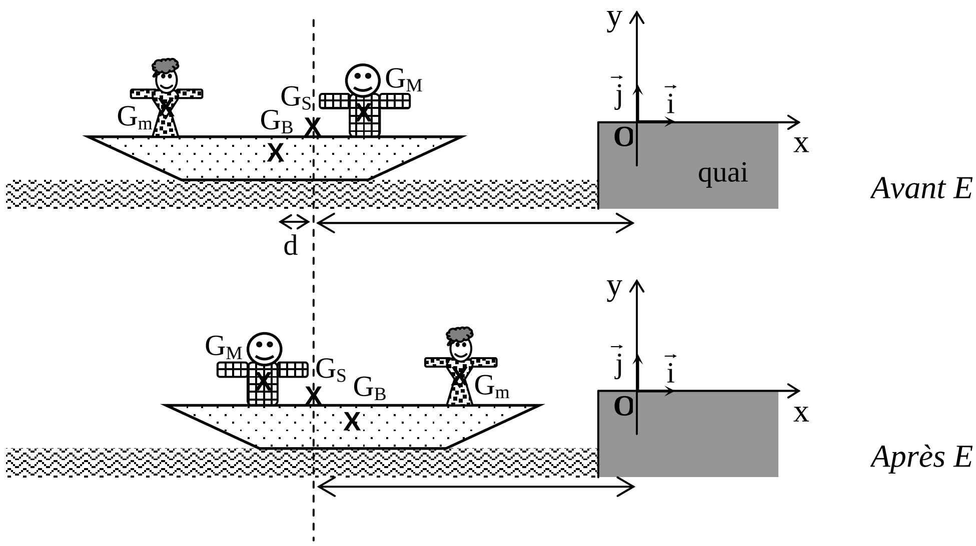
<u>Evénement</u> : E = échange des places (remarque : cet événement n'est pas instantané).
- <u>avant E</u> : le système S, ainsi que chacun de ses éléments, sont au repos.
D'après le Principe d'Inertie, la somme des forces extérieures à S est donc nulle.
- <u>pendant E</u> : Les deux pêcheurs échangent leurs places; ils se déplacent dans la barque grâce aux frottements exercés par la barque sur leurs chaussures; la barque subi également de nouvelles forces liées aux frottements

exercées par les chaussures sur elle. Toutes ces forces sont intérieures au système total S : les deux pêcheurs ainsi que la barque sont donc susceptibles de se déplacer dans le référentiel lié au quai. Les frottements entre la barque et l'eau étant nuls, il n'y a pas apparition d'une nouvelle force extérieure s'exerçant sur le système total S. Le bilan des forces extérieures à S reste donc nul, et d'après le PFD, le centre de masse de S, G_S , restera donc immobile tout au long de l'opération.

- *<u>après E</u> : Les forces intérieures cessent, tout redevient immobile.*

<u>Exploitation</u> : Soit G_B , le milieu (et centre de masse) de la barque. Avant et après l'échange des places, E, le centre de masse G_S du système n'est pas situé en G_B , mais à une distance d de G_B du côté du pêcheur M, car M est plus lourd que m. Il suffit pour comprendre le calcul à effectuer de dessiner les situations (avant) et (après), en respectant le fait que :

- *G_S est immobile par rapport au quai*
- *G_S est à d de G_B , du côté de M*



On constate que le centre de la barque s'est déplacé de deux fois d par rapport au quai.

<u>Calcul de d</u>

C'est le calcul de la position de G_S par rapport à G_B. Soit A un point quelconque; G_S se calcule par définition par : $\overrightarrow{AG_S} = \dfrac{M\ \overrightarrow{AG_M} + m\ \overrightarrow{AG_m} + M_B\ \overrightarrow{AG_B}}{M + m + M_B}$.

En choisissant G_B comme point A, on écrit alors : $\overrightarrow{G_BG_S} = \dfrac{M\ \overrightarrow{G_BG_M} + m\ \overrightarrow{G_BG_m}}{M + m + M_B}$.

Or

- *la distance horizontale (G_B,G_M) est la demi-longueur de la barque L/2. Avant E :* $\overrightarrow{G_BG_M} = \frac{L}{2}\ \vec{i}$
- *la distance horizontale (G_B,G_S) est la distance d recherchée. Avant E :* $\overrightarrow{G_BG_S} = d\ \vec{i}$
- *la distance horizontale (G_B,G_m) est L/2 . Avant E :* $\overrightarrow{G_BG_m} = -\ \frac{L}{2}\ \vec{i}$

On projette l'équation vectorielle sur l'axe horizontal Ox : $(M + m + M_B)\ d = M\ L/2 - m\ L/2$

D'où $d = \dfrac{M - m}{M + m + M_B}\ \dfrac{L}{2}$

<u>Conclusion</u> : la barque s'est déplacée par rapport au quai de : $2d = \dfrac{M - m}{M + m + M_B}\ L$